COURS à l'ETASM - 2004 -

ANALYSE D'IMAGES

APPROCHES GEOMETRIQUES

Opérateurs locaux de distance

Distance entre images

D. Coquin

1 Introduction

Nous allons, dans ce cours, évoluer du codage de base, qu'est la matrice de pixel (en 2D), voxels (en 3D), à des représentations de plus haut niveau, tout d'abord fondées sur l'exploitation du maillage, puis en s'appuyant sur la structure des objets présents dans l'image. Cette évolution va de paire avec le passage de méthodes de codages, à des méthodes dites de représentation, qui ont pour objectifs de permettre la description et la manipulation des formes représentées.

Le passage d'une image réelle continue à sa représentation numérique nécessite le choix d'un maillage que l'on souhaite à la fois simple et régulier. Les maillages préconisés sont: carrés, triangulaire et hexagonal [Cha91]. Cependant, la plupart des systèmes de vision industrielle utilisant une caméra matricielle numérisent les images avec un pas de discrètisation différent en abscisse et en ordonnée. Nous devons donc tenir compte de la forme rectangulaire du pixel. Nous travaillerons donc en maillage rectangulaire (2D) ou parallélépipédique (3D).

Dans le domaine de l'analyse d'images, la notion de distance est utile pour quantifier et décrire les objets présents dans l'image, pour estimer des distances entre objets ou pour déterminer des granulométries. Des efforts ont été menés pour définir des opérateurs de distance discrets qui approchent au mieux la distance euclidienne réelle d_E, tout en permettant un calcul rapide sur l'image et un stockage dans une structure de données de taille raisonnable.

Les images de distances sont couramment utilisées en analyse d'images, que ce soit pour la quantification, la description de formes, la décomposition d'objets ou en robotique. Deux classes de méthodes existent pour construire une image de distance: les distances de chanfrein et la distance Euclidienne. Les distances de chanfrein [Bor86] [Thi92] fournissent des valeurs proches de la distance Euclidienne et se calculent par propagation d'informations locales. Le critère d'optimisation consiste à minimiser l'écart maximum entre la distance locale d_L et distance Euclidienne d_E sur une trajectoire donnée.

Nous allons présenter l'optimisation de l'opérateur de distance, puis viendront les représentations par axes médians, lignes médianes, et squelettes qui s'appuient sur la structure des objets. Enfin une ouverture sur l'espace tridimensionnel sera donné. Les notions présentées ici sont traitées plus en détail, et complétées par d'autres concepts dans [Chassery et Montanvert 91].

1 Pavages et maillages du plan pour un codage discret

1.1 Pavages

Le maillage carré a été présenté comme support d'acquisition d'une image numérique. D'autres maillages peuvent être envisagés pour cela nous allons mener une courte réflexion sur les caractéristiques d'un maillage

Tout d'abord, du point de vue de l'image, on raisonne soit en terme de pavage, soit en terme de maillage.

Un pavage est un partitionnement du plan, à chaque tesselle de ce pavage est associé un pixel de l'image, situé généralement au centre de gravité de la tesselle. Le maillage est défini en reliant les centres de gravité des tesselles adjacents. Aussi pavage et maillage sont des notions duales.

exemples

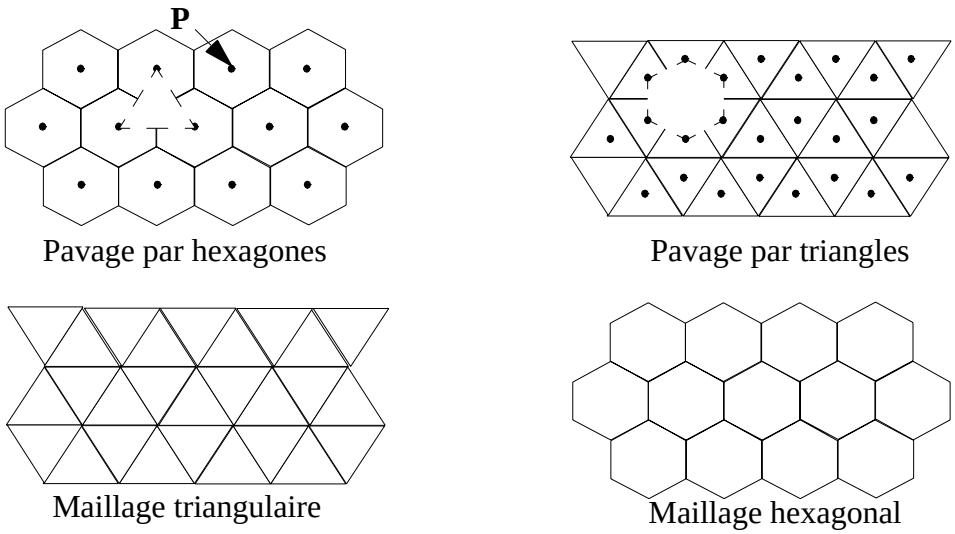


Fig 1.1: Dualité entre pavages et maillages réguliers

On peut remarquer que le partitionnement défini par le maillage associé au pavage triangulaire est le pavage hexagonal, que celui défini à partir du pavage hexagonal est triangulaire. Carré -->carré

Dans le but de représentation d'images, des contraintes particulières sont imposées sur le pavage. Ainsi on peut souhaiter que le pavage choisi soit capable de couvrir de manière identique une image de taille quelconque, ou bien qu'il soit reproductible à différentes échelles.

- on se limite à l'utilisation de polygones convexes et réguliers (côtés égaux et angles égaux)
- un sommet S d'un polygone ne peut être en contact qu'avec d'autres sommets de polygones et non pas avec des arêtes.

1.2 Maillages

Ayant obtenu un pavage, on associe un point P à l'intérieur de chacune de tesselles Vp intervenant dans sa constitution. Les points P peuvent être les centres de gravité des tesselles Vp; en langage d'imagerie, les points P sont appelés pixels (picture elements). A tout point P est associé un point Q tel que Vp et Vq aient une arête commune. L'ensemble de tous les segments (P,Q) ainsi définis forme le maillage associé au pavage.

1.3 Codage du maillage

Le stockage du pavage est généralement réalisé par le biais du stockage du maillage associé. Les points d'intersection du maillage sont ainsi associés aux points P et les voisins immédiats des points P sont donnés par les arêtes du maillage issues de P. La valeur $f_A(P)$ associée à un point P est 0 pour le fond et 1 pour un point objet (on retrouve ici les étapes d'échantillonnage et de quantification).

Maillage carré

Pour représenter des images discrètes, le maillage carré est le plus courant car il correspond au codage fourni par la plupart des capteurs d'une part, et coïncide exactement avec la structure de données classique de matrice d'autre part.

L'image discrète est alors de taille NxN et est codée par une matrice A de même taille, où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne: $A(i,j)=f_A(P)$: P est appelé pixel de l'image.

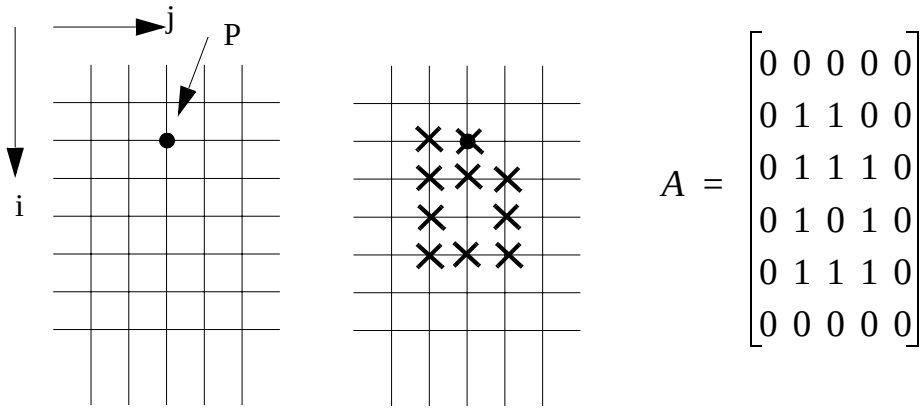


Fig 1.2: Codage matricielle d'une image

Les coordonnées (i,j) d'un pixel sont associées respectivement aux indices de ligne et de colonne d'une matrice, définissant ainsi le repère de Z^2 utilisé pour représenter les images.

Codage et représentation

La matrice de pixels est le codage de base d'une image; ce codage définit une bijection entre les valeurs de la matrice de l'information contenue en chaque point du maillage; les relations entre lignes et colonnes de la matrice traduisent de manière précise la structure du maillage. Le codage matriciel est significatif visuellement et utilisable directement à des fins d'affichage, mais il est indispensable de le structurer pour traiter et décrire par ordinateur le contenu d'une image.

Aussi il s'avère nécessaire de transformer le codage en une représentation différente de la représentation initiale. Plus que de simples conventions de symbolisme à respecter, il s'agit en général, dans le contexte des images, de réelles transformations de la représentation.

Le but des changement de représentation est en effet d'arriver à faire abstraction du moyen de codage, pour s'élever vers des modèles descriptifs des objets présents dans l'image.

Cette transformation s'évalue suivant trois caractéristiques:

- la ***conservation de l'information***, ou tout du moins de l'information qui est intéressante dans le cadre d'une application donnée

- la ***réduction*** de la place nécessaire au stockage du résultat du codage
- l'application facilitée d'***opérateurs de traitement*** sur la base de la nouvelle représentation

A la première caractéristique s'associe la **réversibilité** de la transformation: le codage est-il exacte ou bien constitue-t-il une représentation approchée de l'image initiale; quelle est l'information perdue?
A la seconde caractéristique correspond le **taux de compression** de la nouvelle représentation par rapport à la représentation initiale.
La troisième caractéristique fait intervenir l'**adaptabilité** des opérateurs de traitement dans le nouvel espace de représentation (lorsque cela est possible), où ils doivent également se révéler être plus performants que dans le cadre du codage initial.

Il est difficile de trouver une représentation donnant une pleine satisfaction à tous ces critères. De manière pratique, on choisit un compromis privilégiant les aspects importants pour le problème traité, d'où la prise en compte de **l'objectif à atteindre** dans le choix d'une représentation.

2 Discrètisation

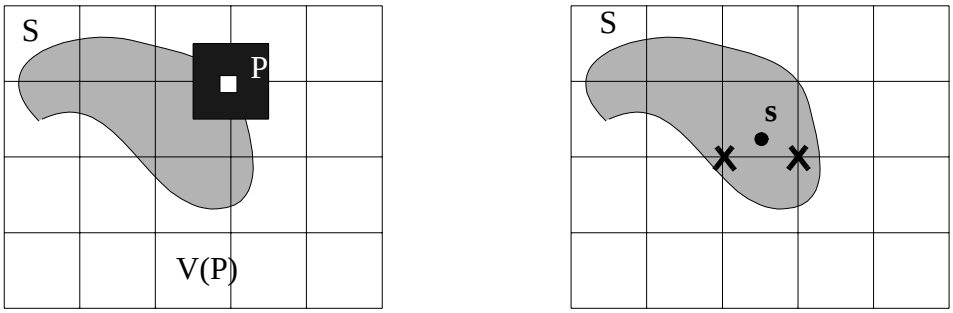
2.1 Problématique

La question que nous nous posons ici est de savoir ***comment doit s'effectuer le passage de l'espace analogique à l'espace discret*** en fonction du contenu de l'image, de manière à ce que, par exemple, la discrètisation d'une courbe analogique soit une courbe discrète, où la discrètisation consiste à représenter par des pixels une entité analogique.

On dispose d'une entité analogique S qui est superposée à un maillage carré; on veut construire sa *discrètisation* S sur ce maillage. Deux approches sont possibles:

- définir la valeur de chaque point P du maillage en fonction de la fonction analogique f dans le voisinage V(P) du point considéré dans $/R^2$; ce voisinage est défini par le pavage.

- définir pour chaque point analogique de S le point du maillage sur lequel il se discrétise (en utilisant par exemple un critère de proximité x).



P appartient à S ? **s appartient à S, choix de x ?**

Fig 2.1: Approche de la discrètisation

Un critère supplémentaire retiendra notre attention, qui est de savoir si on discrétise un objet ou une courbe: dans le cas d'un objet, on sera notamment intéressé par ne retenir que les points discrets inclus dans l'intérieur du plan délimité par la courbe frontière analogique.

La **première approche** entraine une restriction aux points discrets
S est égal à l'ensemble des points du maillage qui sont inclus dans S, soit $f_A(P) = f(P)$ pour P appartenant au maillage. Cette solution est loin d'être satisfaisante, puisque tout ensemble qui ne contient aucun élément du maillage a une discrétisation vide, en particulier une courbe analogique n'a que peu de chance d'intercepter exactement les points du maillage.

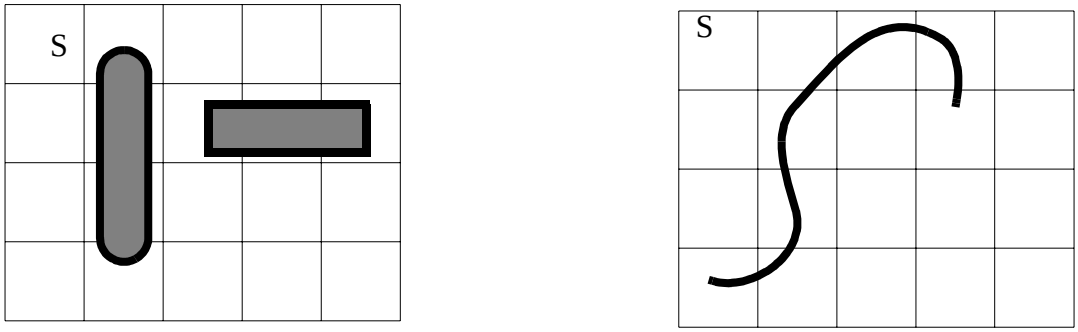


Fig 2.2 : discrétisation par inclusion.

Intégration par tesselle
On tient compte dans le calcul de $f_A(P)$ de la tesselle associée à P, soit Vp, qui est un carré pour le maillage carré, P est un point de l'ensemble discrétisé S si:

$$\frac{1}{S_P}\int\int_{Vp} f(x,y)dxdy > T \qquad \text{avec} \qquad T = 25\%$$

T indique le pourcentage minimum de remplissage de la tesselle de centre P par la fonction analogique pour que P soit affecté à S.

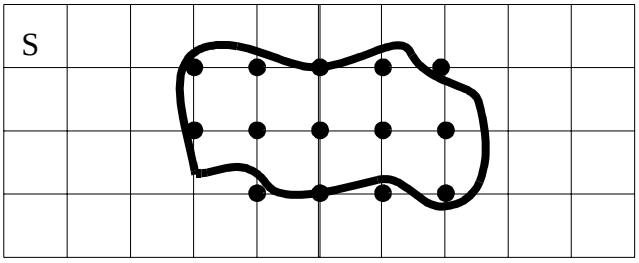


Fig 2.3 : discrétisation par pavage.

Outre les inconvénients déjà mentionnés, de tels procédés de discrétisation ne sont pas invariant ni en **rotation**, ni en **translation** et ne permettent aucune déduction quant à la topologie de l'ensemble discrétisé par rapport à l'ensemble analogique.

2ème approche: on cherche pour chaque point de S le représentant discrêt le plus proche.

2.2 Discrètisation d'un objet par utilisation de semi-ouverts

A chaque point P du maillage on associe un voisinage appelé ***tesselle*** défini comme l'intervalle carré semi-ouvert à gauche et en bas.

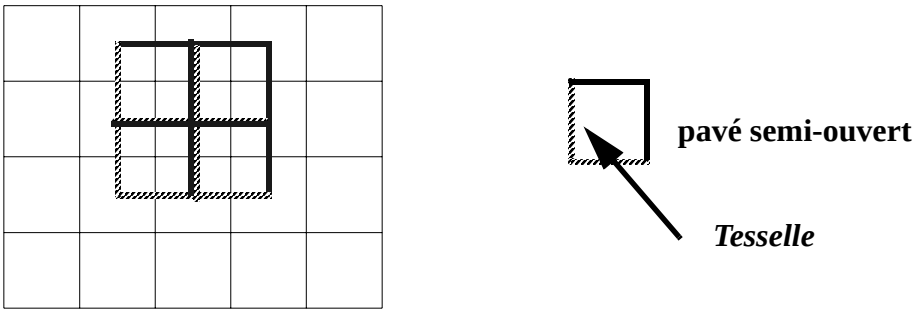


Fig 2.4: discrétisation par semi-ouverts

Etant donné un point S de coordonnées (x,y), ce point se discrétise au point P de coordonnées (i,j) du maillage tel que:

$$(i - 1/2) < x \leq (i + 1/2) \qquad \text{et} \qquad (j - 1/2) < y \leq (j + 1/2)$$

Cette définition de la discrètisation a pour avantage d'associer à tout point analogique ***un et un seul représentant discret.***

2.3 Discrètisation des arcs et des courbes

Du point de vue analogique, les arcs et les courbes sont des ensembles de mesure nulle, qui séparent localement l'espace en deux régions distinctes (sauf pour les points extrémités d'un arc). Aussi il s'agit de trouver une représentation discrète de ces entités analogiques qui vérifient les mêmes propriétés

Différentes approches du problème de la discrètisation d'une courbe sont possibles

2.3.1 Discrètisation par semi-ouverts

La même solution que celle retenue pour les objets peut être proposée: un point du maillage est retenu si l'intersection entre le semi-ouvert qui lui est associé et la courbe à discrétiser est non vide (Fig 2.5).

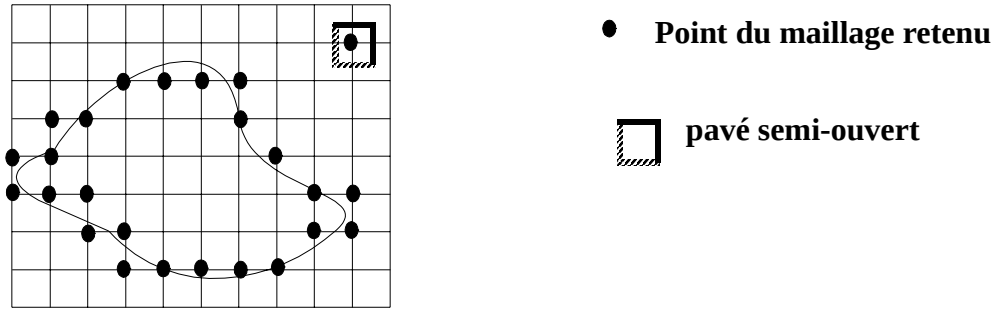


Fig 2.5: discrétisation par pavé semi-ouverts

2.3.2 Discrètisation par intersection avec le maillage

La nature d'un arc ou d'une courbe permet de développer un procédé fondé sur les intersections entre la courbe et les arêtes du maillage. Pour tout point de la courbe analogique de coordonnées (x,y) tel que x ou y est entier, on procède de la manière suivante:

si x=i entier, alors j est défini par $(j - 1/2) < y \leq (j + 1/2)$
si y=j entier, alors i est défini par $(i - 1/2) < x \leq (i + 1/2)$

Autrement dit, pour x ou y entier, donc en tout point où la courbe intersecte les arêtes du maillage, le point (x,y) est représenté par le point du maillage le plus proche (Fig 2.6)

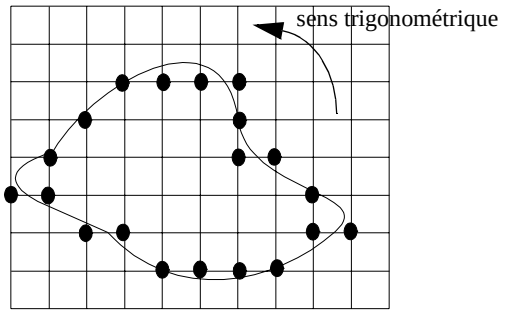


Fig 2.6: discrétisation d'une courbe par intersection avec le maillage

2.3.3 Discrètisation par intersection avec le maillage d'un même côté de la courbe analogique

Dans le cas précis d'une courbe, on peut reprocher aux procédés précédents de ne pas garantir que l'ensemble discret associé se situe à l'intérieur de la courbe analogique. Il est facile de remédier à cela en orientant la courbe analogique.

La représentation discrète d'un courbe analogique va être définie de la façon suivante:

- A tout point R de la courbe C, dont une coordonnée est entière (donc point d'intersection avec le maillage) on associe le représentant discret P "à gauche" de la courbe orienté (dans le sens trigonométrique) sur la même ligne ou colonne du maillage et tel que $d_{infini}(P,R)<1$.

$$d_{infini}(P,R) = \max (|X_P-X_R| + |Y_P-Y_R|)$$

Cette méthode revient à se déplacer sur la courbe dans le sens trigonométrique et à chaque intersection avec le maillage, à affecter à C le premier point discret à gauche sur le maillage (donc par déplacement horizontal ou vertical). (voir fig. 2.7)

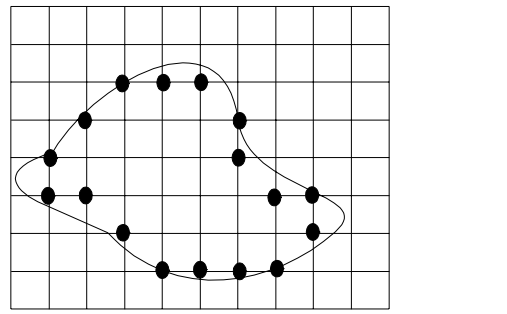


Fig 2.7: discrétisation d'une courbe avec orientation

L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que tous les points de la représentation discrète sont à l'intérieur de la courbe C.

2.4 Rôle du pas d'échantillonnage

Le pas d'échantillonnage noté h, c'est à dire la distance entre les points du maillage superposé à l'image analogique, a une influence importante sur les propriétés des ensembles discrets calculés.

2.4.1 Composantes connexes

Dans le cas de la discrètisation d'objets, nous avons vu que la méthode des pavés semi-ouverts assure que tout ensemble analogique non vide définit une représentation discrète non vide. Par contre, le nombre de composantes connexes ainsi que nombre de trous ne sont pas forcément conservés.
Dans la plupart des cas, il est possible de trouver un pas d'échantillonnage h, de valeur suffisamment faible, de manière à identifier séparément les différentes composantes (Fig. 2.8)

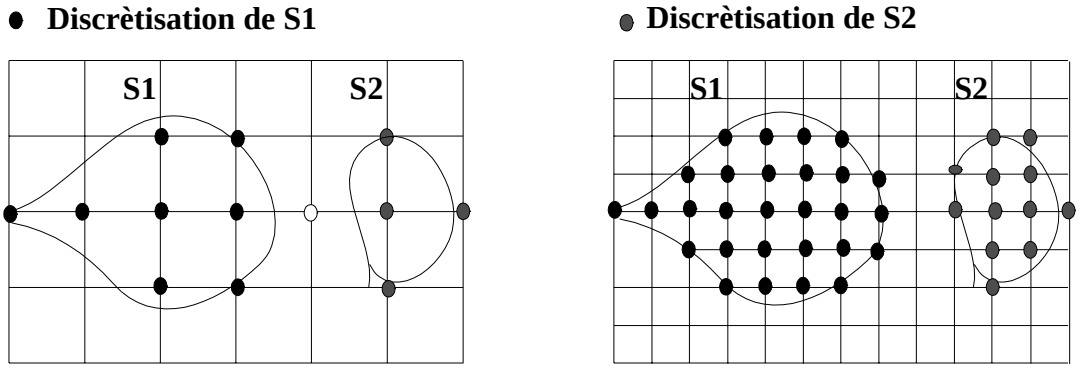


Fig 2.8: Conservation du nombre de composantes connexes.

Le pas d'échantillonnage agit également sur la discrètisation d'une courbe. L'influence du pas d'échantillonnage sur la discrètisation met en évidence l'importance de disposer d'un maillage récursif, c'est à dire permettant d'augmenter la résolution de l'acquisition autant que nécessaire.

3 Distances discrètes

3.1 d_4 et d_8

Tout point P est caractérisé par ses coordonnées (i,j) sur le maillage; i et j sont des entiers qui permettent aussi l'adressage de la matrice de codage de l'image

Les quatre points adjacents et liés à P par le maillage sont également caractérisés comme étant les points à une distance égale à 1 de P., en prenant pour distance la somme des différences des coordonnées des points en abscisse et en ordonnée.

On définit bien une métrique (relation définie positive, réflexive et vérifiant l'inégalité triangulaire), que nous appelons d_4, par

$$d_4(P, Q) = |i_P - i_Q| + |j_P - j_Q|$$

2	1	2
1	X	1
2	1	2

Cette distance est appelée ***City Block Distance*** (ou ***Square Distance***)
On obtient quatre points Q, distincts de P, vérifiant $d_4(P, Q) \leq 1$

1	1	1
1	X	1
1	1	1

On introduit une autre distance, notée d_8, définie par:

$$d_8(P, Q) = max(|i_P - i_Q|, |j_P - j_Q|)$$

Cette distance est appelée en anglais ***Chessboard Distance*** (ou ***Diamond Distance***). On obtient huit points Q, distincts de P, vérifiant $d_8(P, Q) \leq 1$

Etant donné deux points du maillage carré, on pourra donc distinguer le fait qu'ils sont 4-adjacents, adjacents diagonaux ou non adjacents au sens de ces deux métriques. On peut noter que les points adjacents diagonaux sont associés à des tesselles qui ont seulement un sommet en commun.

Les valeurs fournies par ces métriques sont fort différentes du résultat associé au calcul de la distance euclidienne d_E définie par:

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(i_P - i_Q)^2 + (j_P - j_Q)^2}$$

L'erreur relative réalisée lors du calcul de la distance par rapport au point P pour les points désignés par A, B et C sur le schéma suivant est donnée dans le tableau ci-après

A	B	C
P	A	

	A	B	C
$\|d_4 - d_E\| / d_E$	0 %	41,42 %	34,16 %
$\|d_8 - d_E\| / d_E$	0 %	29,29 %	10,56 %

Cette erreur se répercute sur la géométrie des boules associées aux normes relatives à ces distances. C'est à dire lorsque pour un point P donné, on calcule en tout point Q du plan sa distance par rapport à P. On constate alors que la métrique d_4 génère des losanges et que la métrique d_8 génère des carrés.

Ces imperfections sont à l'origine des efforts menés pour définir des distances discrètes qui approchent au mieux la distance Euclidienne. Nous montrons ci-après que cette recherche est conditionnée non seulement par la définition d'une distance, mais aussi par l'efficacité des méthodes de calcul mises en oeuvre et par la structure de données utilisée pour le stockage du résultat.

3.2 Images de distance

Etant donné une image contenant des points dits points de référence, on appelle image de distance l'image telle que la valeur attribuée en tout point P est égale à la distance entre P et le point de référence le plus proche.

Si les points de références sont des points isolés, ceci revient à associer à chaque point non-référence sa distance au point de référence le plus proche

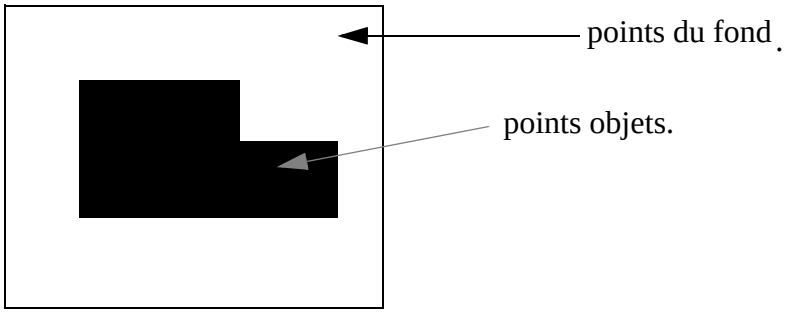


Fig 3.1: points de références

Si les points de référence forment des contours d'objets, ceci revient à définir une carte de distance au contour pour les points des objets. Si les points de référence sont les points du fond de l'image, on définit une carte des distances au fond. Les points affectés à une même valeur de distance forment des courbent de niveau dans les objets.

3.3 Construction par parcours exhaustif

Soit S un ensemble de point de référence d'une image A, les points de S sont identifiés par la valeur A(ij)=0 pour (i,j) point de S. Les autres points, points non-référence, sont affectés à la valeur initiales A(i,j)=infini.

Pour une distance d, l'image de distance B sera telle que, pour tout point P de coordonnées (ip,jp)on obtient B(ip,jp)=d(P,S), c'est à dire

$$B(i_P, j_P) = min_{Q \in S}(d(P, Q))$$

Une approche naïve consiste à calculer les A(ip,jp) par consultation exhaustive des points de S pour la recherche du minimum, et ce en tout point de l'image.

L'accès aux points de référence nécessite à chaque fois une recherche complète sur la structure image. La complexité d'un tel algorithme sur une image de taille NxM est en $O(N^2xM^2)$, donc extrêmement coûteux en temps de calcul.

Le seul intérêt de cet algorithme réside dans le fait que la distance d peut être quelconque, et en particulier la distance Euclidienne.

3.4 Stockage de l'image de distance

Si la distance d utilisée pour faire le calcul est d_4 ou d_8, les valeurs sont entières et l'image des distances est alors une image en "niveaux de gris", pour laquelle la plus grande valeur est limitée par les dimensions de l'image.

Si on utilise, maintenant la distance Euclidienne, il se pose le problème du stockage du résultat. En effet pour un point quelconque de A, $[B(i,j)]^2$ est une valeur entière puisque les coordonnées des points de A sont des entiers, par contre B(i,j) ne l'est pas.

On peut envisager 3 solutions pour stocker le résultats:

- conserver les valeurs B(i,j) réelles, ce qui oblige à changer de structure de données image et ceci n'est pas satisfaisant du point de vue programmation, sans compter qu'il reste toujours des problèmes de précision et de comparaison liés à la manipulation de réels.
- conserver les carrés des valeurs. Ceci limite considérablement les valeurs de distance possibles puisque la valeur en un point est généralement codée sur un Octet, donc limitée à 255.
- s'attacher à garder la même structure de données par valeurs entières sur un octet et stocker un entier approximant la distance réelle. ===> distances de Chanfrein.

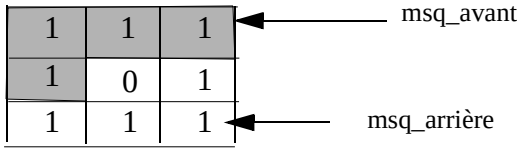
Si on désire vraiment calculer et stocker une image de distance euclidienne, on stockera les valeurs de déplacements en abscisse et en ordonnée [Danielsson80].

3.5 Schéma algorithmique séquentiel pour d_4 ou d_8

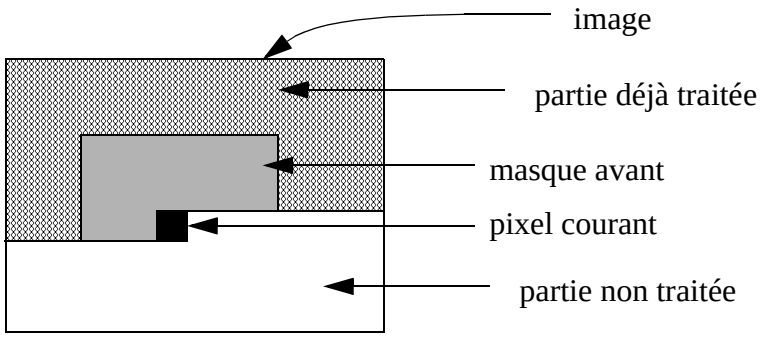
Nous nous intéressons maintenant à la recherche d'algorithmes plus efficaces que le parcours exhaustif, quitte à perdre un peu en exactitude sur le résultat.

Pour ce qui est du calcul de l'image de distance, nous adoptons l'algorithme séquentiel en deux passages [ROSENFELD66] dont on rappelle le principe. Le masque est décomposé en deux sous masque, ***msq_avant*** et ***msq_arrière***. L'un sera utilisé pour le parcours avant (de haut en bas et de gauche à droite) et l'autre pour le parcours arrière (de bas en haut et de droite à gauche). Le point de positionnement du masque sur le point courant est le point de valeur 0.

Fig 3.2: Distance d_8



La nouvelle valeur du pixel de l'image superposée avec le centre du masque sera le minimum des sommes des intensités des pixels de l'image avec les coefficients du masque. Voici comment se déroule le balayage de l'image en deux temps.



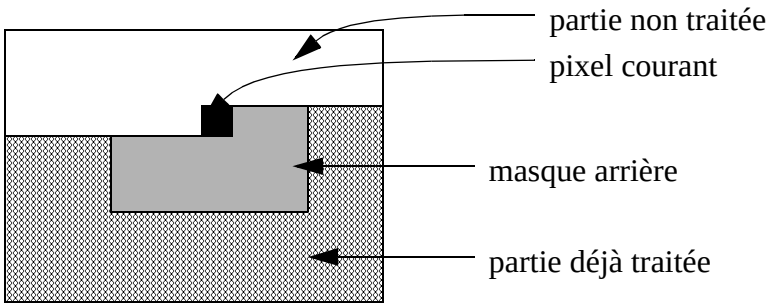


Fig 3.3: Méthode de balayage en deux temps.

Algorithme de traitement.

mise_en_forme(image)
début
tous les points objets reçoivent une valeur infinie (ou très grande M).
tous les points du fond reçoivent la valeur 0.
fin

parcours_avant
début
pour j = 2 à **hauteur**-2 faire
pour i = 2 à **largeur** -2 faire
Image(i,j) = minimum[Image(i+l,j+k) + msq_avant(l,k)]
fin

parcours arrière

début
pour j = **hauteur**-2 à 2 faire
pour i = **largeur**-2 à 2 faire
Image(i,j) = minimum[Image(i+l,j+k) + msq_arrière(l,k)]
fin

Largeur et **hauteur** sont les dimensions de l'image à traiter.



Image de distance d4 **Image de distance d8**

Fig 3.4: Image de distance obtenue par les distance d_4 et d_8.

3.7 Distances pondérées (chanfreins) masque 3x3.

Jusqu'à présent, à chaque déplacement élémentaire a été associé un coût de 1, alors que certains déplacements sont vers les voisins directes et d'autres vers des voisins indirects (obliques). Aussi, il semble naturel de pondérer le déplacement élémentaire par une significative du déplacement euclidien réalisé, tout en gardant le même schéma d'algorithme très performant.

L'approche la plus intuitive consiste à fixer la valeur 1 pour un déplacement en 4-voisinage, et $\sqrt{2}$ pour un déplacement en diagonale. En fait ce choix n'est pas meilleur, car si l'erreur est annulée suivant les directions multiples de 45 degrés, elle prend des valeurs importantes ailleurs.

Il s'agit donc de définir un masque de pondération mp, dont les pondérations seront reliées à un critère d'optimalité de la distance.

Pour avoir une fonction de distance, l'inégalité triangulaire impose b < 2a et le théorème de la projection impose a < b.

L'amélioration du résultat par rapport à la distance Euclidienne nécessite encore 2 étapes:

- on cherche à ce que la distance calculée en un point soit la plus satisfaisante possible et pour cela on autorise des résultats réels
- on rajoute comme contrainte la manipulation d'entiers (approximation entière)

4 Opérateur local de distance en maillage rectangulaire

4.1 Présentation

La forme du pixel est définie par sa hauteur H et sa largeur L. Pour une position donnée de la caméra, et compte tenu du mode de fonctionnement des systèmes d'acquisition d'image, la hauteur du pixel peut-être considérée comme fixe et égale conventionnellement à 1, on supposera de plus que $L \geq 1$.

Le principe de fonctionnement d'un opérateur local de distance de taille NxN (avec N=2p+1) est le suivant. La distance entre le pixel P et Q est définie comme la longueur du plus court chemin entre P et Q, chaque chemin étant constitué de déplacements élémentaires joignant des pixels séparés d'au

plus p lignes ou p colonnes (figure 1). L'image des distances s'obtient par un algorithme séquentiel ou parallèle [Cha91]. La longueur D du plus court chemin entre les pixels P et Q est définie par:

$$D = min(d_i + \delta_i) \qquad (1)$$

où P_i est l'un des voisins du pixel P
δ_i est la longueur du plus court chemin entre Q et P_i
d_i est la longueur du chemin entre P_i et P

Puisque nous cherchons à approximer la distance euclidienne réelle d_E, nous serons amenés à travailler sur une trajectoire circulaire. En effet, le principe de la mesure de distance consiste à calculer la longueur du plus court chemin entre deux points, le plus court chemin n'ayant pas, a priori une localisation privilégiée comme dans [BOR86]. Cette approche avait été suggérée dans [Cha91], mais n'avait pas été développée.

4.2 Optimisation des coefficients, opérateur 3x3

4.2.1 Coefficients réels

Nous reprenons ici la démarche adoptée par Borgefors [Bor86], qui consiste à minimiser l'écart maximal entre la distance euclidienne d_E et la distance locale d_L, pour deux pixels, l'un P(0,0) pris comme origine l'autre Q(x,y)
, décrivant une trajectoire donnée. Le trajet optimal entre deux points peut avoir une orientation quelconque, nous proposons de considérer une trajectoire circulaire. Nous nous plaçons dans le cas de trajectoires de rayon élevé, on peut alors assimiler le déplacement pixel par pixel à un déplacement continu, autorisant ainsi la dérivation. L'optimisation se fait octant par octant en considérant un déplacement continu du pixel Q.

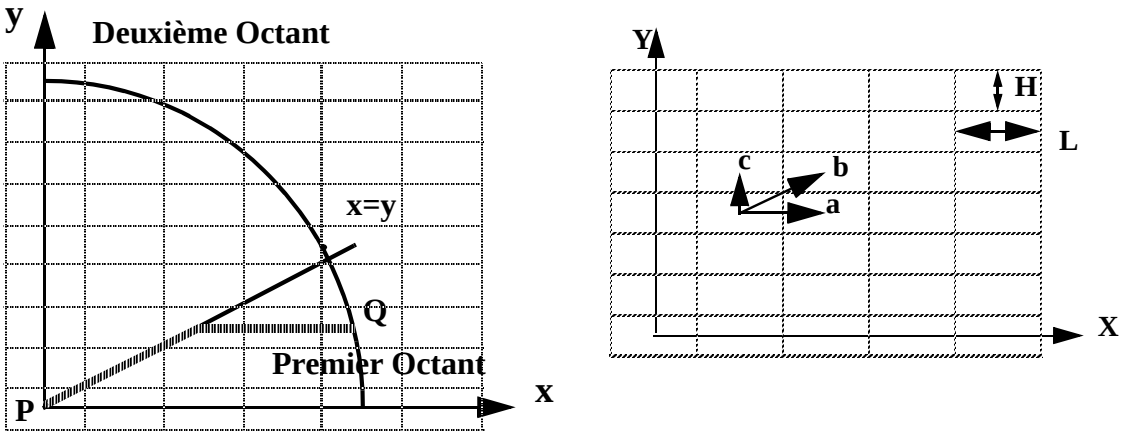


Fig. 4.1: Chemin minimal entre deux pixels

Contrairement au cas traité par Borgefors, le masque des coefficients de l'opérateur local est symétrique par rapport aux lignes et aux colonnes, mais non par rapport aux diagonales. On traitera donc le cas des deux octants formant le premier quadrant.

Soit a, b, et c les coefficients de l'opérateur 3x3. Il existe un chemin minimal formé de deux segments de droites discrets [Cha91] entre les pixels P(0,0) et Q(x,y). Nous considérons que le points Q appartient au premier quadrant, donc $x \le y$, ce qui n'enlève rien à la généralité du problème (fig. 1).

Le pixel Q décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = \sqrt{x^2 \cdot L^2 + y^2}$.

1er octant: l'expression de la distance locale $d_L(P,Q)$ est:

$$d_L(P,Q) = a.(x-y) + y.b = x.a + y.(b-a) \quad \text{pour } 0 \le y \le R/(\sqrt{L^2+1}) \qquad (2)$$

2ieme octant: l'expression de la distance locale $d_L(P,Q)$ est:

$$d_L(P,Q) = b.x + c.(y-x) = x.(b-c) + c.y \quad \text{pour } 0 \le x \le R/(\sqrt{L^2+1}) \qquad (3)$$

Le problème est de déterminer les coefficients a, b, et c, afin de minimiser l'erreur maximale réalisée pour Q. Dans le premier (resp. deuxième) octant, l'erreur $E = d_L - d_E$ est une fonction continue de y (resp. x) et dérivable par morceaux et a pour expression:

$$E_1(y) = y(b-a) + \frac{a}{L}\sqrt{R^2-y^2} - R \quad \text{pour} \quad 0 \le y \le R/(\sqrt{L^2+1}) \qquad (4)$$

$$E_2(x) = x(b-c) + c\sqrt{R^2-(Lx)^2} - R \quad \text{pour} \quad 0 \le x \le R/(\sqrt{L^2+1}) \qquad (5)$$

L'erreur est donc extrêmal lorsque la dérivée s'annule ou aux extrémités des intervalles, d'où les expressions suivantes:

$$E_{11} = R\left(\frac{a}{L} - 1\right) \quad \text{pour} \quad y = 0 \qquad (6)$$

$$E_{12} = R\left(\frac{b}{\sqrt{L^2+1}} - 1\right) \quad \text{pour} \quad y = R/(\sqrt{L^2+1}) \qquad (7)$$

L'expression de la dérivée de la fonction (4) est la suivante:

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = (b-a) - 2a\frac{y}{2L\sqrt{R^2-y^2}} \qquad (8)$$

La valeur extrêmale s'obtient pour $E'_1(y) = 0$, c'est à dire pour:

$$y = \frac{LR(b-a)}{\sqrt{a^2 + L^2(b-a)^2}} \qquad (9)$$

En reportant la valeur de y donnée par l'équation (9) dans l'équation (4) et en simplifiant, on obtient l'expression de l'erreur:

$$E_{13} = R\left(\frac{\sqrt{a^2 + L^2(b-a)^2}}{L} - 1\right) \qquad (10)$$

On procède de la même façon pour obtenir la valeur de l'erreur dans le deuxième octant. L'erreur est extrêmum aux bornes de l'intervalle et lorsque la dérivée est nulle.

Pour $x = R/(\sqrt{L^2+1})$

$$E_{21} = R\left(\frac{b}{\sqrt{L^2+1}} - 1\right) = E_{12} \qquad (11)$$

Pour x = 0, l'erreur a pour expression:

$$E_{22} = R(c-1) \tag{12}$$

La valeur extrêmale s'obtient pour E'$_2$(x) = 0, c'est à dire pour:

$$x = \frac{R(b-c)}{L\sqrt{(b-c)^2 + L^2c^2}} \tag{13}$$

En reportant cette valeur dans (5), on obtient une autre expression de l'erreur:

$$E_{23} = R\left(\frac{\sqrt{(b-c)^2 + L^2c^2}}{L} - 1\right) \tag{14}$$

On trouve la valeur optimum des coefficients a,b et c en minimisant l'erreur. Des études antérieures montrent que cela se produit lorsque $E_{11} = -E_{13} = E_{12}$. En résolvant cette équation on obtient:

$$a_{opt} = \frac{-2L + 2L\sqrt{1 + (\sqrt{L^2+1} - L)^2}}{(\sqrt{L^2+1} - L)^2} \tag{15}$$

$$b_{opt} = a_{opt} \cdot \frac{\sqrt{L^2+1}}{L} \tag{16}$$

La valeur optimal de c s'obtient en résolvant l'équation $E_{11} = E_{22}$.

$$c_{opt} = \frac{a_{opt}}{L} \tag{17}$$

L'erreur maximale entre la distance locale et la distance Euclidienne est proportionnelle au rayon R de la trajectoire et est donnée par l'expression:

$$E_{max} = \left|1 - \frac{-2L + 2L\sqrt{1 + (\sqrt{L^2+1} - L)^2}}{(\sqrt{L^2+1} - L)^2 L}\right| \cdot R \tag{18}$$

Si on considère un maillage carré (L=1), on obtient les coefficients suivants:

$$a = c \cong 0,9604 \quad , \quad b \cong 1,3582 \tag{19}$$

Ces valeurs sont sensiblement égales à celles obtenues par l'optimisation sur une trajectoire rectiligne [Bor86]:

$$a = c \cong 0.9551 \quad , \quad b \cong 1,3507 \tag{20}$$

Cependant la valeur de l'erreur maximale est différente, puisqu'avec notre opérateur nous trouvons une valeur de:

$$E_{max} \cong 0.03956 \cdot R \tag{21}$$

alors que Borgefors trouvait:

$$E_{Bmax} \cong 0.04491 \cdot M \tag{22}$$

M étant la valeur de l'abscisse de la trajectoire verticale.

Dans la suite on appelera erreur maximale normalisée e_{max} définie par:

$$e_{max} = \frac{E_{max}}{R} \qquad (23)$$

4.2.2 Approximation entière

Dans la majorité des cas, il est préférable d'utiliser des coefficients entiers, pour des raisons de temps de calculs et d'espace mémoire. L'approximation entière est obtenue en utilisant un facteur multiplicatif N (qui peut être vu comme un facteur d'échelle), et en prenant la valeur arrondie de l'entier le plus proche. Soit A, B, C les coefficients entiers, nous avons:

$$X = \text{arrondi}(x.N) \qquad \text{pour } x = a, b, c \qquad (24)$$

Comme l'erreur maximum est une fonction continue par rapport à X et Y avec X,Y=A, B, C, l'erreur maximum actuelle (avec l'approximation entière) tend vers l'erreur théorique (avec les coeffcients réels) lorsque N tend vers l'infini.
D'autre part le facteur d'échelle N est limité, pour des raisons pratiques.
Soit DimxDim les dimensions de l'image digitalisée et i le nombre de bits pour coder un pixel de l'image des distances. La distance maximale entre 2 pixels de l'image digitalisée est :

$$\Delta_{max} = Dim \cdot B \qquad (25)$$

Nous devons avoir: $$Dim \cdot B = Dim \cdot arrondi(b \cdot N) \approx Dim \cdot b \cdot N < 2^i \qquad (26)$$

Alors, le facteur d'échelle doit satisfaire à:

$$N < N_{max} \approx \frac{2^i}{Dim \cdot B} \qquad (27)$$

Exemple: soit Dim=512, L=1 (maillage carré) et i=16 bits
L'équation (27) donne $N_{max} = 94$. La meilleur approximation entière est obtenue avec N=25. Les valeurs des coefficients sont alors:

$$A = 24, \quad B = 34, \quad C = 24, \qquad (28)$$

4.3 Optimisation des coefficients, opérateur 5x5

4.3.1 Coefficients réels

La figure 2 montre les différents déplacements élémentaires dans le cas d'un maillage rectangulaire de taille 5x5.

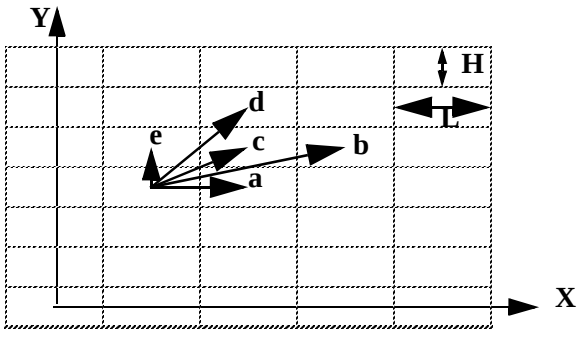


Fig. 4.2: Déplacements élémentaires pour un opérateur 5x5 en maillage rectangulaire

Nous reprenons ici la même démarche que pour l'opérateur 3x3, qui consiste à minimiser l'écart maximal entre la distance euclidienne d_E et la distance locale d_L, pour deux pixels, l'un P(0,0) pris comme origine l'autre Q(x,y), décrivant une trajectoire circulaire. Nous nous plaçons dans le cas de trajectoires de rayon élevé, pour assimiler le déplacement pixel par pixel à un déplacement continu, autorisant ainsi la dérivation. L'optimisation se fait donc en considérant un déplacement continu du pixel Q (figure 3), octant par octant, puisque le masque n'est pas symétrique par rapport à la diagonale.

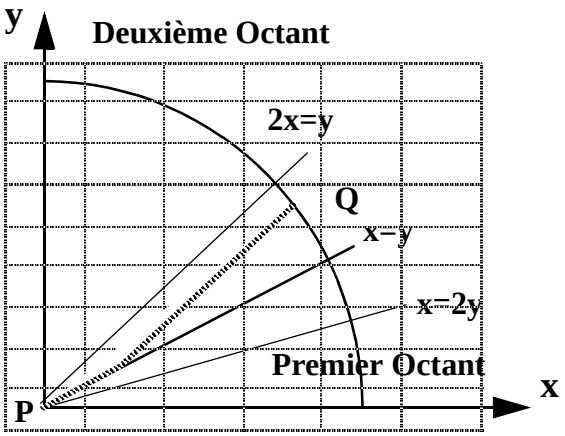


Fig. 4.3: Chemin minimal entre deux pixels

Le problème est de déterminer les coefficients a, b, c, d, et e afin de minimiser l'erreur maximale réalisée pour Q. Dans le premier (resp. deuxième) octant, l'écart $E = d_L - d_E$ est une fonction continue de y (resp. x) et dérivable par morceaux. L'écart est donc extrêmal lorsque la dérivée s'annule ou aux extrémités des intervalles. Compte tenu des expressions de la distance locale dans chaque octant, il est possible de déterminer de façon indépendante, les valeurs optimales de a et b d'une part, d et e d'autre part. L'optimisation du coefficient c conduira à deux valeurs différentes, c_1 et c_2, pour chaque octant, on prendra celle qui entraine une erreur minimale.

Si on considère un maillage carré (L=1), les coefficients optimaux de l'opérateur local sont:

$$a = e \cong 0.9864 \quad , \quad c_1 = c_2 \cong 1.4079 \quad , \quad b = d \cong 2.2057 \tag{29}$$

L'erreur maximum normalisée vaut: $e_{max} = 0.01356$ (30)

4.3.2 Approximation entière

En reprenant le même raisonnement qu'au paragraphe 4.2.2, l'approximation entière est obtenue en utilisant un facteur multiplicatif N (qui peut être vu comme un facteur d'échelle), et en prenant la valeur arrondie de l'entier le plus proche. Soit A..E les coefficients entiers, nous avons:

$$X = \text{arrondi}(x.N) \qquad \text{pour } x = a..\ e \tag{31}$$

Exemple: soit Dim=512, L=1 (maillage carré) et i=16 bits
L'équation (27) donne $N_{max} = 90$. La meilleur approximation entière est obtenue avec N=73. Les valeurs des coefficients sont alors:

A = 72, B = 161, C = 103, D = 161, E = 72 (32)

En utilisant ces coefficients et ce facteur d'échelle N, l'erreur maximum normalisée entre la distance locale et la distance Euclidienne est 0.01369. On peut remarquer que l'erreur produite par l'opérateur avec l'approximation entière est très proche de celle obtenue par l'opérateur avec les coefficients réels.

5 Etude des performances

Dans un premier temps nous allons étudier l'influence de la largeur du pixel sur l'ecart relatif par rapport à la distance Euclidienne. Cette étude se fait en calculant l'anisotropie. L'anisotropie peut être caractérisée par la répartition angulaire de l'écart entre la distance local d_L et la distance euclidienne d_E.

Dans un deuxième temps nous comparerons les performances de l'opérateur par rapport à la taille du masque utilisé.

5.1 Influence de la largeur du pixel

Les courbes de la figure 4 représentent l'évolution de l'écart relatif $(d_L - d_E) / d_E$ pour deux pixels P et Q, P étant le pixel origine, Q décrivant un cercle de rayon R. On génère, à l'aide de l'algorithme de Bresenham [HEG85] un tracé discret d'arc de cercle, de centre P de rayon R suffisamment élevé (ici R=200). Pour chaque pixel de cet arc, on évalue l'écart entre la distance euclidienne au centre du cercle et la distance fournie par l'opérateur local à coefficients réels. On trace ensuite la courbe donnant cet écart en fonction de la position angulaire.

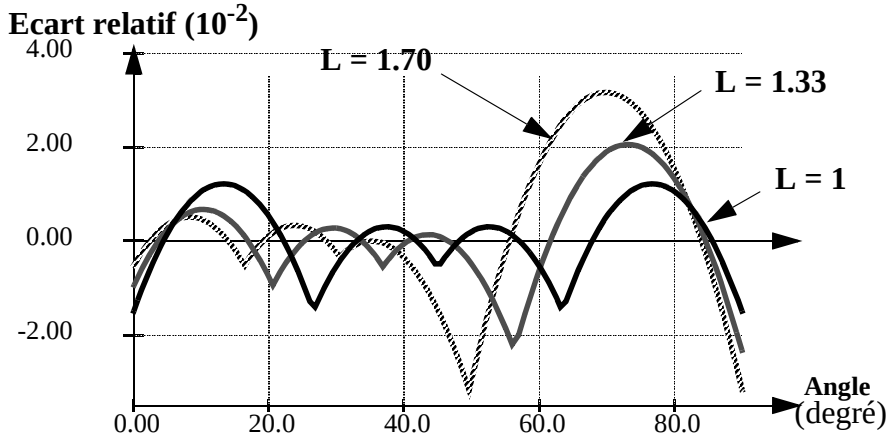


Fig. 5.1: Ecart relatif par rapport à la distance euclidienne en fonction de l'angle
Rayon = 200 - Coefficients réels optimaux

L'anisotropie est renforcée lorsque la largeur du pixel augmente. On remarque que l'erreur maximale se situe dans le deuxième octant, du fait de la forme du pixel et de la différence des pas de discrètisation.

5.2 Variation de l'erreur relative en fonction de la taille de l'opérateur

La figure 5montre la répartition de l'erreur relative pour les différents opérateurs 3x3, 5x5 et 7x7 le

long de la trajectoire circulaire de rayon R=200, les coefficients étant entiers.

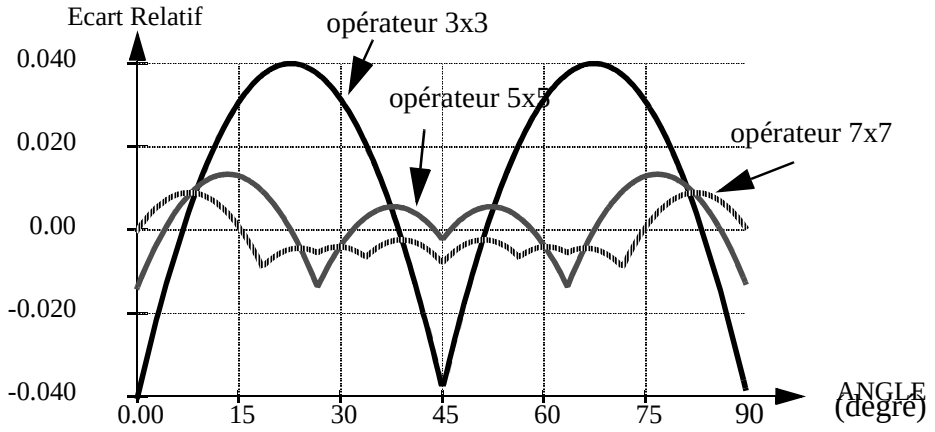


Fig. 5.2: Ecart relatif par rapport à la distance euclidienne en fonction de l'angle
Rayon = 200 - Coefficients entiers

On peut remarquer que plus la taille de l'opérateur augmente et plus l'erreur relative est faible. Quelque soit la taille de l'opérateur, l'erreur maximale se situe toujours dans le premier demi octant.
Nous donnons maintenant la géométrie des boules générées par les différentes distances, en maillage carré (L=H=1), pour différentes tailles de masque 3x3, 5x5, 7x7:



distance d4 distance d8 chanfrein 3x3 (24, 34) N=25



chanfrein 5x5
(72, 161, 103) N=73

chanfrein 7x7
(67, 210, 149, 240, 94) N=67

On retiendra que plus le masque est grand, plus le résultat se rapproche de la distance Euclidienne d_E, et donc plus l'écart entre la distance local et d_E est faible. Cependant, plus la taille du masque est grande, plus le temps de calcul est important. Un bon compromis est l'utilisation un masque 5x5, ou l›utilisation d'un masque non cubique (3x5) par exemple.

6 Axe median

6.1 Principe

Dans l'espace discret, l'axe médian est un concept qui fait intervenir le recouvrement d'un objet par des boules, de manière à accéder à une représentation minimale d'une image. La figure 6.1 nous montre un objet recouvert partiellement par des boules de tailles différentes.
Notons que les boules de grande taille contiennent des boules de taille plus petites qui à leurs tours en contiennent d'autres etc..., ainsi l'ensemble de l'objet est recouvert. L'axe médian sera extrait d'une partie de ces boules.

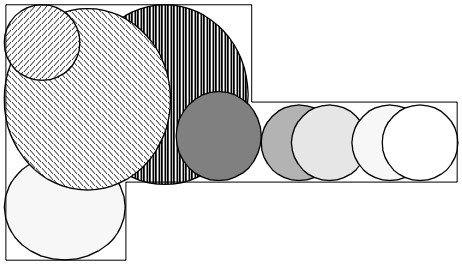


Fig. 6.1: Objet recouvert par des boules.

Nous allons voir comment s'effectue la caractérisation des boules qui forment l'axe médian, puis quelles sont les propriétés et les utilisations de l'axe médian.

6.2 Caractérisation des boules.

On considère une image comprenant un ensemble O de points objet, les autres points formant le fond F de l'image (figure 6.2).

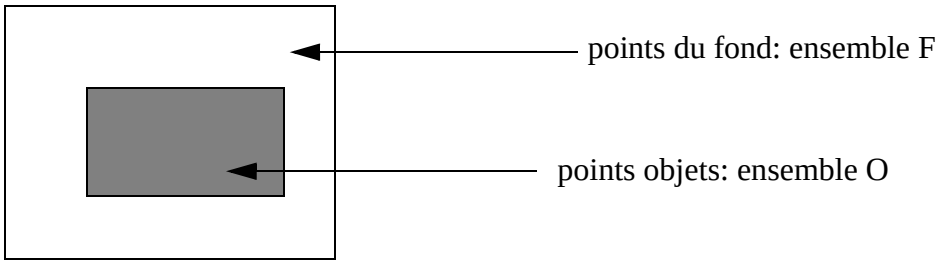


Fig. 6.2: décomposition d'une image en deux ensembles F et O.

Tout point objet P ($P \in O$) peut être étiqueté par la valeur Rp de sa distance au fond F, c'est à dire la distance par rapport au point fond qui lui est le plus proche, en utilisant une distance d quelconque. Autrement dit l'ensemble des points de F forment l'ensemble des références nécessaires à la reconstruction de l'image de distance.

Une boule discrète Bd (P, Rp) de centre P et de rayon Rp est définie par:

$$\text{Bd (P, Rp)} = \{\forall (Q \in O), \quad d(P, Q) \leq Rp\}$$

Ainsi l'ensemble des points O est l'union de toutes les boules contenues dans O.

$$O = U_{p \in O} \; Bd(P, Rp)$$

Ceci est évident puisque toute boule centrée en P contient au moins le point P. L'ensemble O est ainsi défini par un recouvrement au moyen de boules (figure 6.3).

6.2.1 cas particulier: distance d8.

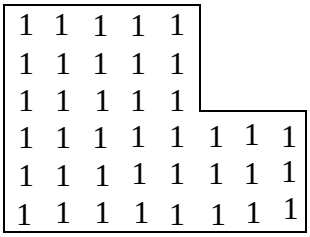


Fig. 6.3.a: image binaire

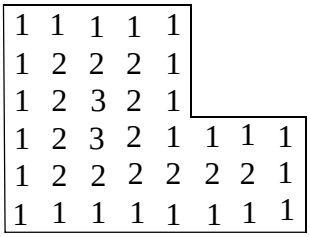


Fig. 6.3.b image de distance d=d8

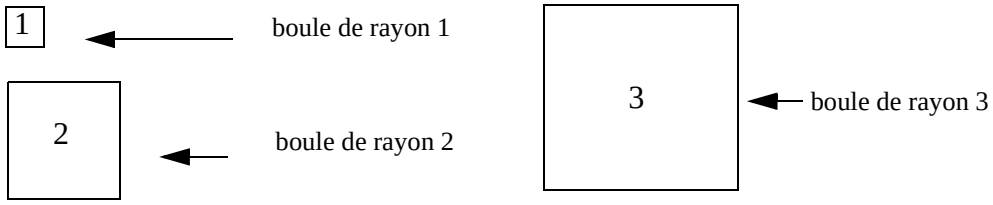


Fig. 6.3.c: les différentes boules intervenant dans l'image de distance.

Nous remarquons que dans la figure 6.3.b certaines boules sont complètement incluses dans d'autres boules. Ce genre de boules n'apporte aucune information supplémentaire pour la reconstruction de l'image initiale. Donc par soucis de gain de mémoire et de meilleur codage nous serons amenés à ne pas les retenir.
On appellera les boules restantes: **BOULES MAXIMALES *(boules qui ne sont pas complètement incluses dans d'autres boules)***. Ces boules maximales sont nécessaires pour reconstituer l'image initiale.

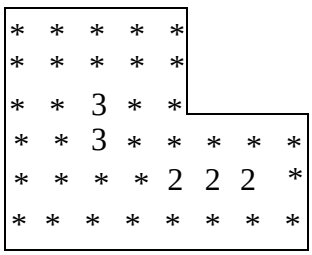


Fig. 6.4: Centres des boules maximales.

La connaissance de ces 5 boules maximales assure la reconstruction de l'image initiale, pour la distance d_8. (figure 6.4)

L'ensemble des centres des boules maximales forment l'axe médian de l'objet O, noté AM(O).

Cependant l'axe médian ne garantit pas le minimum des points nécessaires à la reconstruction de

l'image initiale. En effet, certaines boules maximales sont contenues dans l'union de deux ou plusieurs autres boules maximales (figure 6.5)

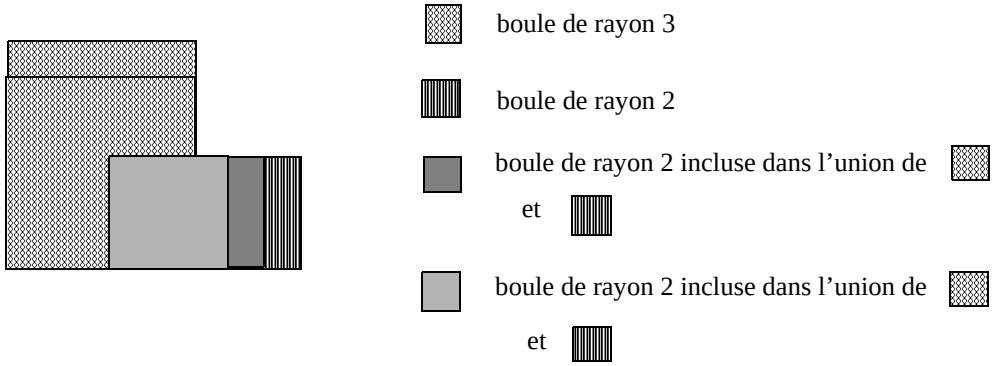


Fig. 6.5: Cinq boules recouvrent l'objet. Mais deux d'entres elles sont incluses dans l'union de deux autres.

L'ensemble des boules maximales peut être divisé en deux sous ensembles:

- Le sous-ensemble composé de boules qui sont complètement incluses dans l'union de plusieurs boules. Les boules appartenant à ce sous ensemble seront appelées BOULES PSEUDO-MAXIMALES.

- Le sous-ensemble composé de boules qui ne sont pas complètement incluses dans aucune autre boule ou union de boules. Ces boules sont vraiment nécessaires à la reconstruction de l'image initiale. Elles seront appelées BOULES MAXIMALES NECESSAIRES.

Pour ce qui est de la caractérisation de l'axe médian, nous allons utiliser le fait que les centres des boules maximales portent des poids supérieurs ou égaux à leurs 8-voisins $V_{8\text{-}P}$. [PFALTZ 67]:
Autrement dit:

$$P \in AM(O) \Leftrightarrow \forall \quad Q \quad \in V_{8-P} \ \ tel \ \ que \quad (R_P \geq R_Q)$$

R_P et R_Q étant respectivement la distance au fond des points P et Q.

Signalons que deux points côte à côte ne peuvent pas à la fois appartenir à l'axe médian et être de valeur différentes. Ceci découle directement de la définition précédente.

6.3 reconstitution de l'image initiale.
Nous utiliserons la version séquentielle en deux passages, comme pour la création de l'image de distance. L'algorithme est le suivant:

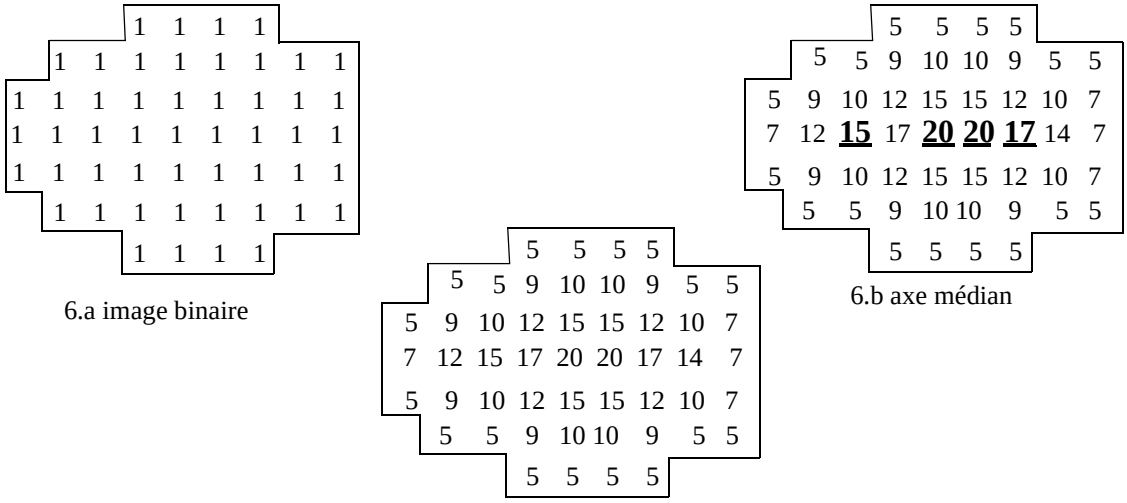
tant que (l'image initiale n'est pas entièrement reconstruite) faire
Parcours avant:
pour j = 1 à **hauteur** faire
pour i = 1 à **largeur** faire
IMA(i+l,j+k) = maximum (IMA(i+l,j+k) , IMA(i,j)-msq_avant(l,k))

Parcours arrière:

pour j = 1 à **hauteur** faire
pour i = 1 à **largeur** faire
IMA(i+l,j+k) = maximum (IMA(i+l,j+k) , IMA(i,j)-msq_arrière(l,k))

***fin tant que*.**

La boucle ***tant que*** est nécessaire car le double passage avant et arrière ne suffit pas pour reconstruire l'image initiale, il ne fait qu'épaissir l'axe médian de l'épaisseur du masque
Pour stopper la boucle ***tant que*** une fois que l'image est reconstruite, nous pouvons faire appel à plusieurs paramètres qui nous renseignent sur l'avancée de la reconstruction de l'image. On peut, par exemple, utiliser la valeur du rayon de la plus grande boule maximale nécessaire. Une fois que cette boule est entièrement reconstruite, toutes les autres boules de tailles plus petites sont également reconstruites, donc l'image toute entière est reconstruite (fig. 6.6).



6.a image binaire

6.b axe médian

6.c image reconstruite

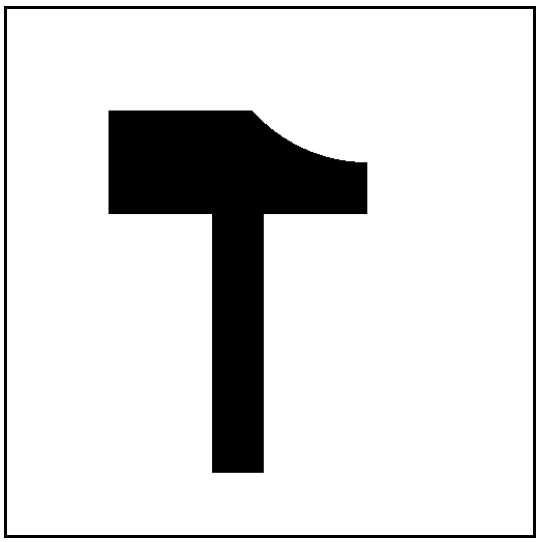
Fig. 6.6 a: image binaire b: son axe médian c: l'image reconstruite.
traitement effectué avec L=1.5 et n=5

Lors de la reconstruction de l'image, il faut impérativement avoir la même largeur de pixel que celle utilisée pour créer l'axe médian.

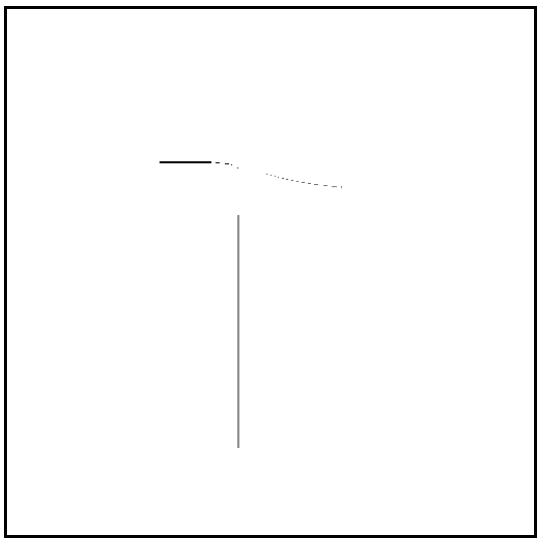
6.4 Exemples.

L'axe médian constitue un codage simple et facile à réaliser. Bien sûr il dépend de la taille de l'image traitée, mais il permet de réduire considérablement le nombre de donnés pour d'éventuels traitements comme la reconnaissance de forme. Par exemple pour une image de 256x256 au lieu de comparer 65000 points environ, il ne suffira de comparer que quelques centaines de points.

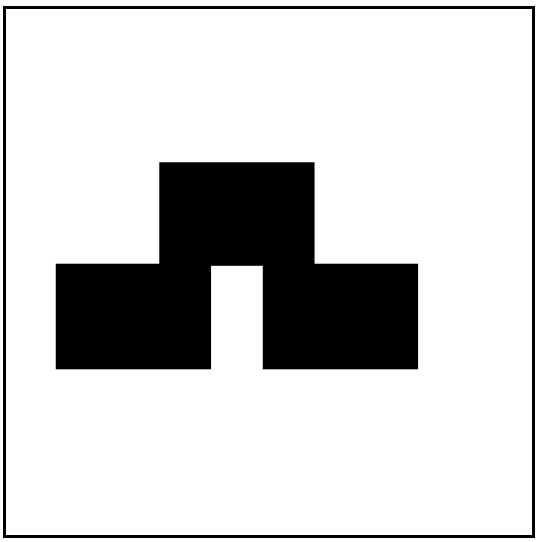
Dans la suite, nous montrons des images binaires et leurs axes médians correspondants



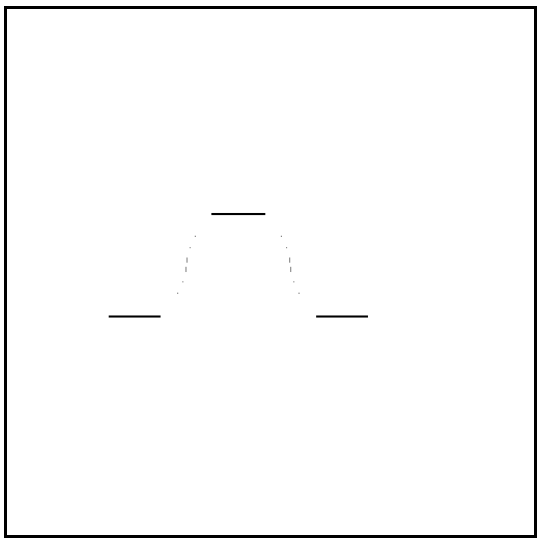
a: image binaire



b: axe médian pour L=1,0



a: image binaire



b: axe médian pour L=1,0

7. Ligne médiane

Nous avons déjà vu dans les paragraphes précédents les images de distance et les axes médians issus d'un opérateur local de distance. Dans le paragraphe concernant les axes médians, nous avons constaté que ces derniers étaient discontinus et par conséquent difficile à utiliser. Dans un premier temps nous énonçons brièvement le principe d'extraction de lignes médianes en maillage carré.

7.1 Principe.

En prenant comme image initiale une image de distance au fond, un point de l'axe médian est un maximum local sur l'image de distance et par conséquent il ne possède pas de voisin dans les courbes de

niveau de poids strictement supérieur au sien: donc tout point de l'axe médian est ***point multiple*** Les points à retenir pour la ligne médiane sont des points dits ***points multiples***, à savoir que ce sont des points où l'on "passe plusieurs fois" lors du suivi du contour de l'objet en cours d'amincissement.

Un ***point multiple*** discret est un point qui vérifie au moins l'une des conditions ci-après (figure 7.1):

- (1) il est traversé plus d'une fois lors du suivi de contour de l'objet,
- (2) il n'a pas de voisin à l'intérieur de l'objet,
- (3) il a au moins un voisin direct(1) qui appartient au contour, et qui n'est pas son prédécesseur ou son point successeur sur le contour.

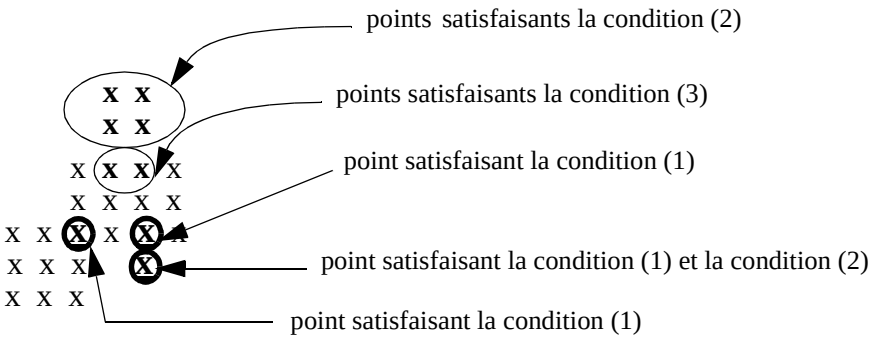


Fig. 7.1: Points multiples dans l'espace discret

(1): Le voisin direct signifie le 4-voisinage en maillage carré. Deux voisins directs doivent logiquement être à la même distance du point considéré. Ceci n'est pas forcément le cas en maillage rectangulaire. La notion de voisin direct perd un peu de son sens en maillage rectangulaire.

L'algorithme se présente donc de cette façon:

procédure ligne_médiane;
début
$L = \varnothing$
répéter
- tracer les contours (internes et externes) des objets de l'image A;
- détecter les points non-multiples de ces contours et les affecter à l'ensemble L
- supprimer dans l'image A les points de L;

jusqu'à $L = \varnothing$;
fin

$\varnothing$:signifie ensemble vide.

L'image A résultante est l'***image de la ligne médiane*** de l'image initiale

Ce traitement par contour assure qu'à chaque itération, une nouvelle courbe de niveau est traitée, complétée des points multiples déjà retenus. On remarque que la notion de point multiple induit la conservation de zones d'épaisseur 2.

exemple: extraction de la ligne médiane par pelage itératif pour d_8

		1	1	1	1	1	1	1							
		1	2	2	2	2	2	1	1	1	1				
1	1	1	2	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1		
1	2	2	2	3	4	3	3	3	3	2	2	2	1		
1	2	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1		
1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1			1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1						1	2	1
														1	1	1

			2	2	2	2	2								
			2	3	3	3	2	2	2	2					
	2	2	2	3	4	3	3	3	3	2	2	2			
	2	3	3	3	3	3	2	2	2	2			1		
	2	2	2	2	2	2	2							1	
															2

				3	3	3									
				3	4	3	3	3	3	2	2	2			
		3	3	3	3	3						1			
													1		
														2	

				4	3	3	3	3	2	2	2				
		3	3	3							1				
												1			
														2	

Nous nous intéressons, ici à la ligne médiane, avec le cas particulier de la distance d_8, où nous verrons que le traitement itératif peut être transformer en un traitement qui nécessite uniquement un nombre constant de parcours de l'image, quelle que soit la taille des objets qu'elle contient.

7.2 Calcul de la ligne médiane pour la distance d_8

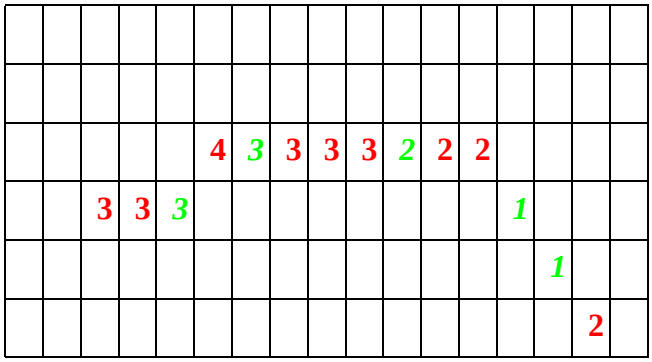
La ligne médiane est formée de ***points de l'axe médian*** complétés de ***points de connexion***. Ces points sont extraits par la caractérisation des ***points multiples***.

Algorithme:

A l'itération **i** on retient les ***points multiples*** du contour de l'objet en cours de traitement, ce qui va provoquer l'extraction de points de poids **i**. Les ***points multiples***, ainsi retenus sur la courbe de niveau de poids **i** se répartissent en **3 classes**:

- les points de l'axe médian de poids **i**
- les ***points de connexion*** de poids **i** qui connectent un point de connexion de la courbe de niveau de poids **i-1** à la courbe de niveau de poids **i+1**
- les ***points de connexion*** qui ne sont pas dans la catégorie précédente et qui correspondent alors à la naissance d'une connexion à établir ==> ***points doubles***.

p : points de l'axe médian ***p*** : points doubles



En considérant l'image de distance au fond comme une surface, les chemins de connexion suivent la ligne de crêtes de la surface à partir des lieux de déconnexion.

1 2 2 2 2 2 3 **4** 3 2 2 2 2 2 1
1 1 1 1 2 2 3 **3** 3 2 2 1 1 1 1
1 2 2 2 **2** 2 2 2 1
1 1 1 1 **2** 1 1 1 1
1 **2** 1
1 1 1

Fig 7.2: ligne médiane vue comme un suivi de ligne de crête

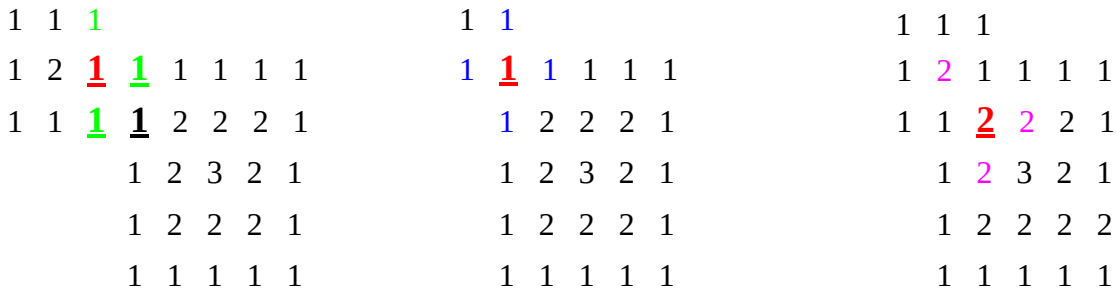
La classification précédente des points de la ligne médiane en ***points de l'axe médian*** et en ***points de connexion*** permet de les caractériser sur l'image sans avoir à recourir à un processus de pelage itératif.
La ***détection des points de l'axe médian*** ne pose pas de problème puisqu'il suffit de tester la maximalité locale sur l'image des distances.
Les ***points de connexion*** se construisent par un suivi de chemin connexe sur l'image de distance, à partir des points initiaux déduits des **points doubles** (voir les 3 catégories des points doubles).

- les points doubles correspondent au repliement d'une courbe de niveau sur elle-même, ce qui peut se produire soit à proximité des maximums locaux, soit lorsque la forme présente un rétrécissement.
Soit $(P_i)_{i=0, ..., n}$ la suite des points obtenue lors du suivi d'une courbe de niveau, P_j est un **point double** ssi:

_ P_j n'est pas un maximum local
_ il existe un indice i tel que:
$i \neq j + 1$ et $i \neq j - 1$
P_i n'est pas un maximum local
$P_i = P_j$ ou $d_4(P_i,P_j) = 1$ (et alors P_i est aussi point double)

Cette formulation fait référence au suivi de la courbe de niveau de poids i, mais en fait les conditions se traduisent par des configurations locales qui sont facilement identifiables sur l'image de distance.

Fig. 7.3: ***détection des points multiples pour la distance*** d_8.



a: points doubles de type 1 possède trois voisins directs de même poids
poids

b: point double de type 2 4 voisins directs de même poids

c: point double de type 3 2 voisins directs ! voisin indirect de m.

Ces points doubles indiquent où vont se produire les déconnexions. Il reste à en déduire les ***points d'initialisation*** des chemins de connexion. Leurs déductions à partir des points doubles est la suivante:
- pour les ***points doubles de type 1 et de type 3***, les points d'initialisation sont égaux aux points doubles; dans certains cas, deux points génèrent le même chemin
- pour les ***points doubles de type 2***, il peut être nécessaire de générer plusieurs chemins; les points d'initialisation sont les voisins diagonaux de poids **i+1** du point double.

Les **chemins de connexion** forment des chemins qui traversent les courbes de niveau; il suffit donc, pour un point de connexion de poids **i**, de chercher parmi ses voisins un point de poids **i+1**, puis de réitérer la même opération. Lorsque la propagation ne peut plus se poursuivre, on aboutit à un maximum local et la connexion est alors bien établie.

Pour assurer l'***unicité*** du chemin, on se dirige ***orthogonalement*** aux courbes de niveau. Ceci revient à sélectionner un voisin direct tant que cela est possible, puis à passer aux voisins indirects. On obtient alors l'algorithme suivant:

Soit $(P_i)_{i=0,\ldots,n}$ le chemin de connexion
_ P_0 point d'initialisation et P_n maximum local
_ $rp_i = rp_{i-1} + 1$
_ l'existence de t : $0 \le t \le n$ et

$$d_4(P_i, P_{i+1}) = 1 \text{ pour } 0 \le i \le t-1$$

$$d_8(P_i, P_{i+1}) = 1 \text{ et } d_4(P_i, P_{i+1}) = 2 \text{ pour } t \le i \le n-1$$

Ces chemins de connexions se construisent pas à pas à partir des points d'initialisation. Ce principe de calcul se généralise aux distances de chanfrein.

7.3 Algorithme de traitement

Une fois les points doubles détectés, il faut entreprendre un ***suivi-chemin*** pour relier tous les points de l'axe médian. La détection des points doubles n'est autre que la détection des points de départ pour relier un segment (ou un point) de l'axe médian à un autre (figure 7.3).

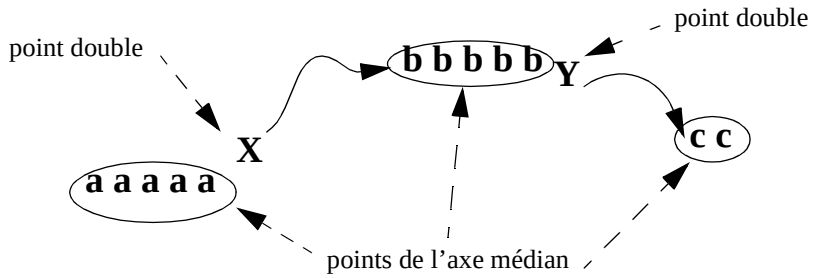


Fig. 7.4: Points doubles et suivi-chemin lors du tracé de la ligne médiane.

La procédure suivi-chemin se déroule de la façon suivante:

Une fois que le point d'initialisation (double) est détecté, on regarde son 8-voisinage et on prend le maximum de tous ces points. Ce maximum sera bien sûr différent du point de l'axe médian qui appartient au 8-voisinage du point d'initialisation. On conserve le point maximum qui n'appartient pas à l'axe médian. Une fois ce point choisi on recommence le traitement. C'est-à-dire que l'on regarde à nouveau le 8-voisinage de ce point et on retient le maximum, jusqu'à ce que l'on rencontre le prochain point de l'axe médian. Le traitement se poursuit jusqu'à ce qu'on ait traité tous les points doubles. L'algorithme est le suivant:

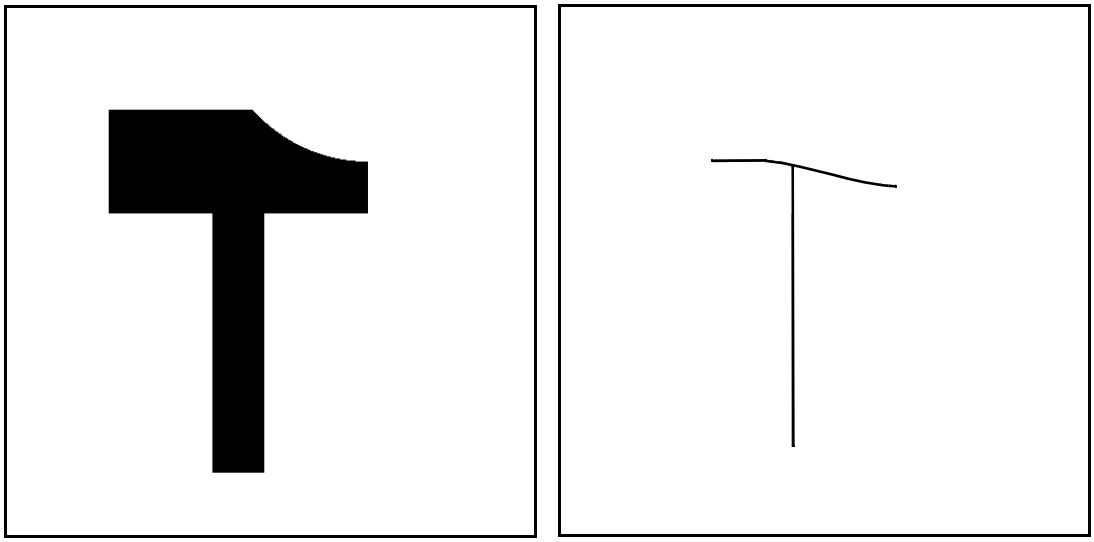
(LM et AM sont respectivement les pointeurs de la ligne médiane et de l'axe médian.)

pour y = 0 à **hauteur** faire
    pour x = 0 à **largeur** faire
    détecter les points doubles et les mettre dans LM.

pour y = 0 à **hauteur** faire
    pour x = 0 à **largeur** faire
    prendre le premier point double Pt et faire un **suivi-chemin** (Pt)
    refaire **suivi-chemin** pour le point suivant et continuer jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de point double.

procédure **suivi-chemin** (Pt)
        Prendre le maximum Ptmax du 8-voisinage de Pt et le mettre dans LM;
        Pt = Ptmax;
        suivi-chemin (Pt);
        jusqu'à ce que l'on rencontre un point de AM.
fin **suivi-chemin**;

Exemple de ligne médiane



7.5a image binaire **7.5b ligne médiane**

On remarque que les connexions correspondent à des chemins connexes discrets dirigés vers l'intérieur de l'objet, c'est à dire traversent les lignes de niveaux.

7.4 Graphe de la Ligne médiane

Nous présentons ici la construction d'un graphe de représentation de forme à partir de la ligne médiane, calculé pour la distance d_8. Cette représentation est de type région car les sommets du graphe codent des éléments de surface de l'objet initial.

Nous avons vu que les boules de distance associées aux points de l'axe médian forment un recouvrement de l'objet codé. Etant donné deux points P et Q de l'axe médian, associés aux boules de rayons R_P et R_Q, ces deux boules ont une intersection non vide ou sont adjacentes si et seulement si: $R_P + R_Q \geq d_8(P, Q) + 1$

Sur la ligne médiane associée à l'image initiale, ces relations correspondent à des maximums locaux voisins ou à des maximums locaux entre lesquels il existent un chemin de connexion discret.

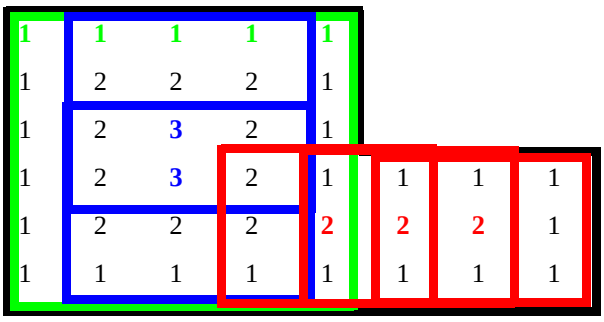


Fig 7.6: image de distance d=d_8 et centre des boules maximales

L'axe médian assure un recouvrement d'un objet par des boules maximales (qui sont carrés dans le cas de la distance d_8) et la ligne médiane assure une connexion discrète de ces points, par des chemins centrés dans l'objet (voir exemple Fig 7.7)

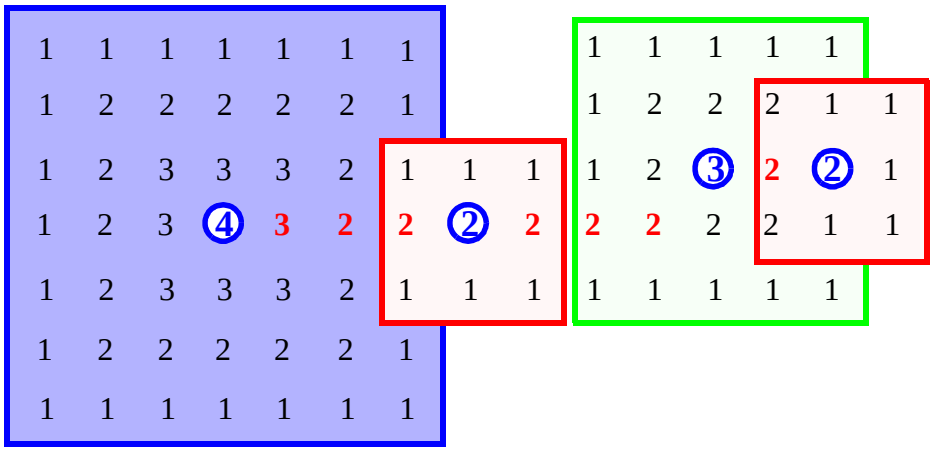


Fig. 7.7: Axe médian et recouvrement par des boules carrées, connexion par ligne médiane

Le passage à un graphe apparaît alors de lui même, les points de l'axe médian contribuent à la formation des **sommets** du graphe et les chemins de connexions contribuent à la formation des **arcs du graphe**.

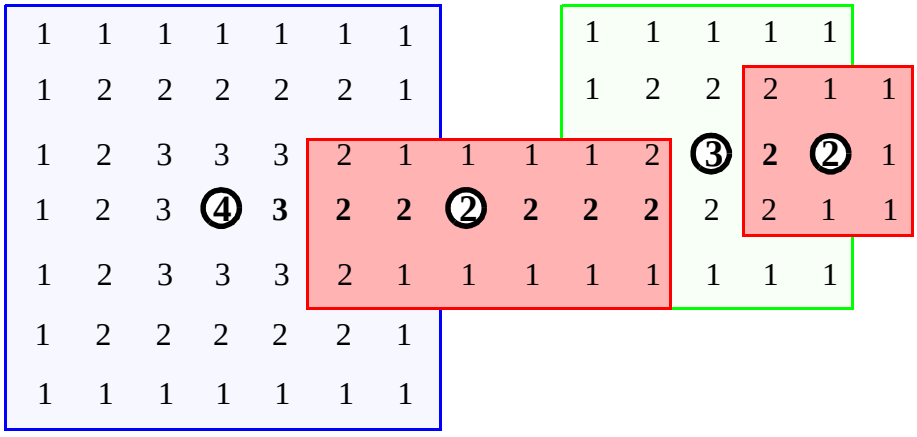


Fig 7.8: Exemple de partitionnement d'un objet

Un sommet du graphe représente plusieurs points de l'axe médian de même poids, et chaque sommet apporte ainsi une contribution à la constitution de la forme finale Fig. 7.9

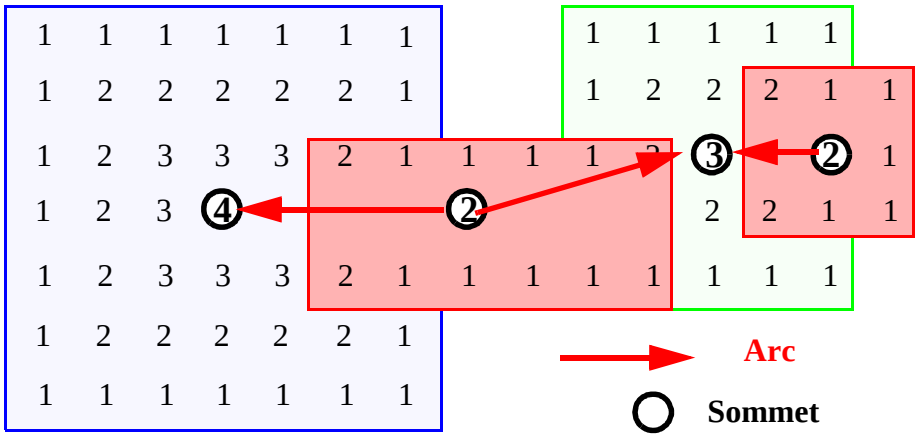


Fig. 7.9: Graphe de la ligne médiane

- Chaque sommet apporte une contribution à la constitution de la forme finale
- Un arc est un chemin de connexion discret.

Aspect descriptif de la représentation

soit MAD[i,j] la matrice d'adjacences du graphe, si MAD[i,j] = k > 0 , l'arc k a pour queue le sommet **i**, et pour tête le sommet **j**, ce qui s'interprète au niveau de l'objet par le fait que la primitive de surface codée par le sommet **i** est une déformation (un ajout de moindre importance) de la primitive de surface codée par le sommet **j**.

Les sommets du graphe sont alors répartis en 4 catégories:

i **sommet principal** : si quel que soit j on a $MAD[i,j] \leq 0$

==> ne possède aucun arc sortant (3,6,9,12)

i **sommet de proéminence stricte**

==> i a 1 seul arc sortant et aucun arc rentrant (1,4,10)

i **sommet de proéminence large**

==> i a 1 arc sortant et au moins 1 arc rentrant (2,7)

i **sommet de rétrécissement**

==> i a au moins 2 arcs sortants (5,8,11)

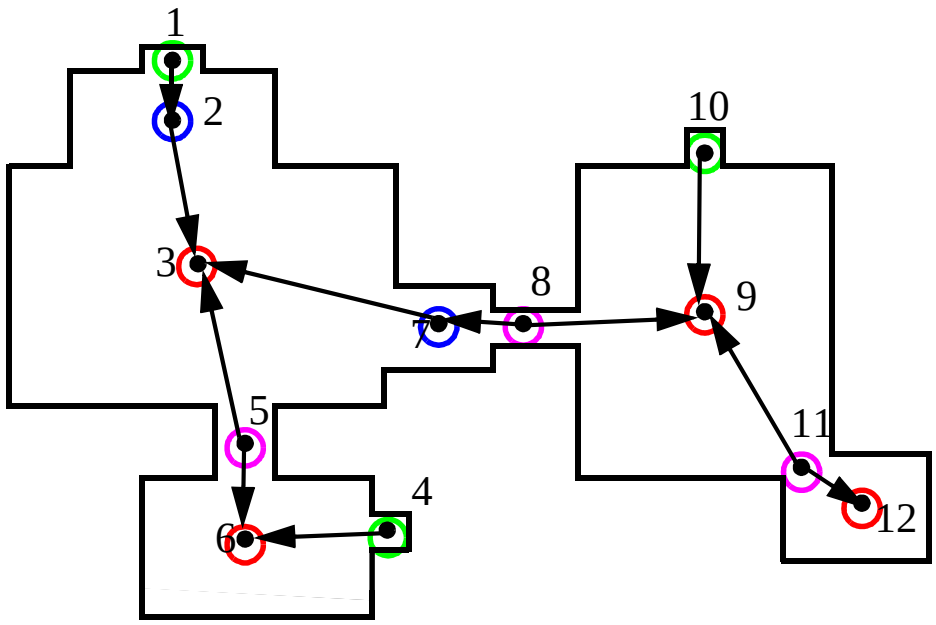


Fig. 7.10: Les différents types de sommets du graphe

Suppression de petites entités

En fixant un ***seuil*** de distance au fond, tous les maxima locaux correspondant à une distance inférieure ou égale à ce ***seuil*** sont supprimés et les régions de l'objet définies par ces seuls maxima locaux disparaissent lors de la reconstruction. Inconvénient: on ne tient pas compte de la structure de l'objet, ce qui peut entraîner des pertes de connexité.

Un condition suffisante à la préservation de la connexité est de ne pas supprimer les sommets qui définissent les surfaces de connexion, c'est à dire les sommets qui sont sur des chemins du graphe de la ligne médiane issus de sommets de rétrécissement.

La structure de graphe permet de définir un ***filtrage relatif*** pour lequel un sommet est supprimé seulement s'il est non significatif par rapport au sommet principal ou rétrécissement dont il dépend.

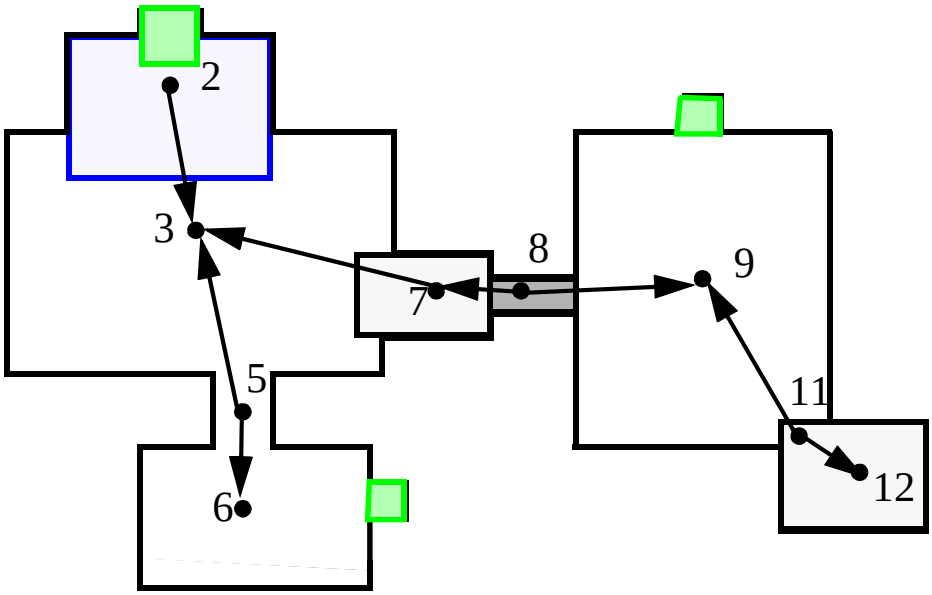


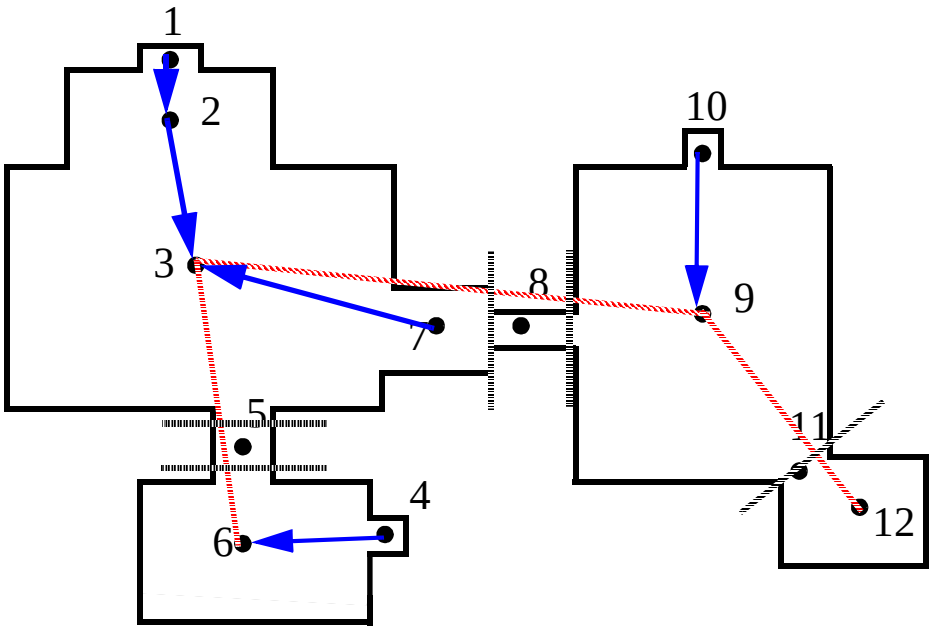
Fig. 7.11: Suppression des petites entités

Le suivi des chemins sur le graphe définit des associations entre sommets. Ainsi tout sommet de proéminence est associé à un sommet principal ou de rétrécissement, et tout sommet de rétrécissement est associé à plusieurs sommets principaux ou de rétrécissement.

Les associations correspondantes à la figure 7.10 sont: 1-->3; 2-->3; 4-->6; 5-->(3,6); 7-->3; 8-->(3,9); 10-->9; 11-->(9,12).

Dans un but de décomposition nous nous intéressons aux sommets principaux; à chaque sommet principal est alors associé un **sous-graphe** qui est un arbre. Chacun de ces **sous-graphes** définit une entité de la décomposition de l'objet initial. Sur l'exemple précédent les **sous-graphes** (**principal**,proéminences) sont le suivants (**3**,1,2,7); (**6**,4); (**9**,10); (**12**).

Fig. 7.12: Graphe de passage et sous graphe



Une seconde possibilité de décomposition à partir du graphe de la ligne médiane consiste à détecter les lieux de rétrécissement, pour ensuite y générer des arcs de partitionnement. Cette approche présente l'avantage de ne pas perdre de surface par rapport à l'objet initial; le traitement à réaliser sur le graphe est encore plus simple que dans le cas précédent, puisqu'il se limite à un test local.

Le traitement par les sommets de rétrécissement permet en outre de conditionner la décision de partitionnement. En effet, les chemins issus d'un sommet de rétrécissement SR aboutissent sur des sommets principaux ou de rétrécissement SPi; l'évaluation de l'importance contextuelle du rétrécissement est alors réalisée par analyse des rapports des poids de ces différents sommets. Un arc de partitionnement n'est alors tracé que si le rétrécissement SR est suffisamment significatif (étroit) par rapport aux entité SPi qu'il connecte.

Un intérêt supplémentaire du graphe de la ligne médiane est de fournir directement les relations topographiques entre les entités de décomposition. Un graphe non orienté appelé **graphe de passage** est ainsi défini, indiquant pour chaque entité les autres entités auxquelles elle est connectée.

Le graphe de passage de l'exemple précédent est le suivant Fig 7.12.

(3,6) ; (3,9) ; (9,12).

8 Squelettes

Les notions de squelette et de lignes médianes sont très voisines. La seule différence est la réversibilité de la ligne médiane contrairement au squelette. Donc tout ce qui a été dit sur les lignes médianes reste valable pour le squelette.

Une des possibilités pour obtenir des images de squelettes est de binariser la ligne médiane et de réduire l'épaisseur de cette dernière à un point, car le squelette est filiforme contrairement à la ligne médiane qui en certains points peut avoir une épaisseur de deux pixels.

Les représentations par squelettes sont l'exemple même des codages de formes qui intègrent non seulement un aspect codage, mais de plus des caractéristiques de description des objets codés. Pour donner une première idée d'un squelette, disons qu'il s'agit d'une représentation filiforme d'un objet, qui est centrée dans cet objet et qui est représentative de la forme de l'objet dont il est extrait.

Au concept de squelette peut être associée une liste plus complète des propriétés souhaitées pour cette représentation:

- il est inclus et centré dans l'objet,
- il est mince, formé d'arcs et de courbes,
- il comporte le même nombre de composantes connexes et de trous que l'objet (homotope)
- il a même allure que l'objet, c'est à dire qu'il comporte des branches à la place des parties allongées de l'objet,
- il assure la reconstruction de l'objet initial (réversibilité).

On retrouve dans cette liste des propriétés caractéristiques de tous codages, complétées de propriétés spécifiques à la notion de squelette, dont certaines sont assez subjectives. La propriété de réversibilité fait la différence entre les **squelettes binaires** (non réversibles) et les **lignes médianes** (réversibles). La construction d'un squelette d'une forme analogique se modélise de la manière suivante:

- le contour de la forme sert d'initialisation à une onde, qui se propage à vitesse constante V vers l'intérieur de la forme,
- les lieux où le front de l'onde s'intercepte définissent la trace du squelette,
- l'instant auquel chaque point P du squelette est créé, soit t(P), par rapport à l'instant d'initialisation, est attribué au point concerné; on l'appelle le poids de P.

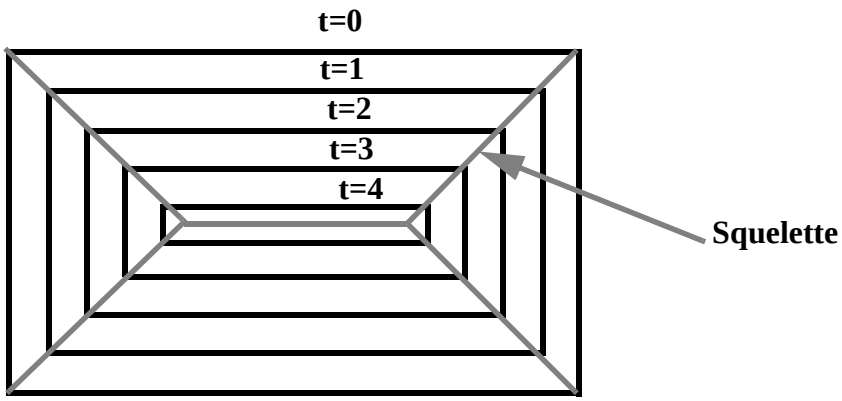
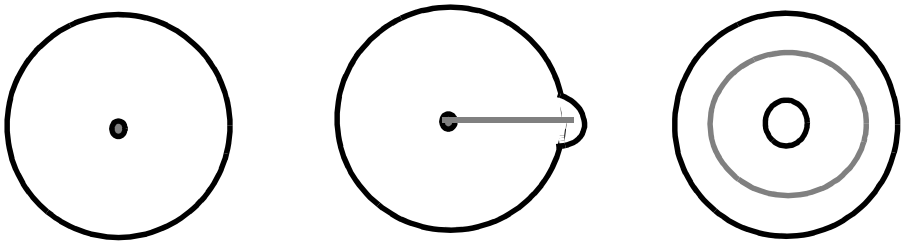


Fig. 8.1: Squelette d'un rectangle

Quelques défauts du squelette:

- une petite déformation du contour crée une forte perturbation du squelette en générant une branche,
- un trou dans une forme modifie complètement la topologie du squelette



Il existe 3 classes de méthodes de caractérisation du squelette:

- une première qui définit des squelettes binaires. Ces méthodes s'attachent à traduire par des procédés algorithmiques le phénomène de propagation d'une onde. La transformation satisfait la propriété d'homotopie, par contre elle n'est pas réversible.

- une seconde consiste à retenir les centres de boules maximales incluses dans l'objet, c'est le concept d'AXE MEDIAN. Cette approche correspond à un codage exacte des objets, totalement réversible, mais qui définit généralement un ensemble de points non connexe pour un objet connexe. Elle est de plus liée à une distance discrète et pose alors des problème de non isotropie.

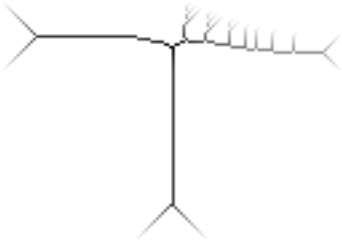
- la troisième définit les lignes médianes, c'est une conciliation des 2 approches précédentes, pour conserver simultanément isotropie et réversibilité de la transformation, mais parfois au détriment de l'aspect filiforme du résultat. Cette approche présente l'avantage de structurer l'axe médian et d'être ainsi utile á la description de formes.

Un squelette est le résultat d'un processus d'érosion de l'objet, il n'est pas toujours parfait pour ce qui est de son type de connexité et de son allure vis á vis de l'objet initial. Aussi, dans la plupart des cas,

le squelette nécessite un post-traitement visant à l'améliorer pour supprimer les points inutiles, ou si le procédé fourni un squelette trop ramifié (ce qui peut être dû à un objet dont le contour est bruité) un procédé d'ébarbulage sera mis en oeuvre.



(a): image de test.



(b): squelette mince



(c): squelette mince après élaguage Seuil=0.5



(d): squelette mince après élaguage Seuil=0.9



(e): objet reconstruit

Figure 8.2: Squelettes avant et après élaguage.
chanfrein 3x3, coefficients utilisés (24,34,24).

Les squelettes sont généralement calculés pour construire une représentation syntaxique de l'objet initial. Pour cela le squelette est décomposé en arcs qui sont eux-mêmes approximer par des segments de droite et le squelette est alors symbolisé par un GRAPHE. La reconnaissance des arcs se révèle être un problème non trivial, car des raccordements ne sont pas toujours détectables dans un seul voisinage 3x3

9 Extensions tridimensionnelles

Les méthodes de représentations d'images présentées jusqu'à présent ont porté sur des images bidimensionnelles; nombre d'entre elles peuvent s'étendre à la représentation de volume dans l'espace tridimensionnel. La représentation de base, associée à la matrice 2D en pixels, est une matrice 3D de voxels (volume element). On notera que le volume de données à manipuler devient important: par exemple un volume de voxels 512x512x512 sur 256 niveaux de gris occupe 128 Moctets: ceci devra être pris en compte dans la mise en oeuvre.

Si on considère un pavage de l'espace en cube, les voisinages correspondants sont:

- le 6 voisinage (équivalent du 4-voisinage en 2D, les cubes ont une face commune)
- le 18 voisinage (les cubes ont une face ou une arête commune)
- le 26 voisinage (équivalent du 8-voisinage en 2D, les cubes ont une face, une arête ou un sommet en commun)

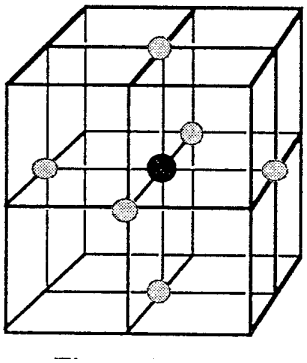


Fig 9.1a
les points 6-adjacents à P

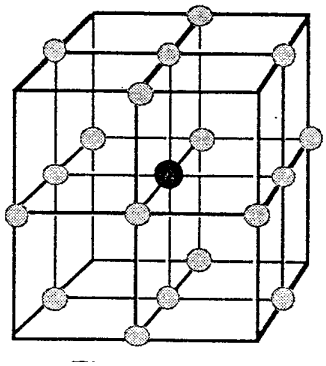


Fig 9.1b
les points 18-adjacents à P

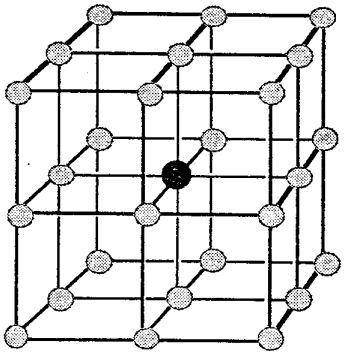


Fig 9.1c
es points 26-adjacents à P



= Point P



= Points adjascents à P

9.1 Accès au 3D

Si l'acquisition d'une image 2D se conçoit facilement, tout simplement par l'utilisation d'une caméra, il n'en est pas de même pour l'acquisition d'un volume 3D. Nous ne parlons pas ici de l'estimation de la profondeur à partir de plusieurs vues 2D (tel que cela se fait en stéréoscopie), ou à partir d'une seule vue par exploitation des ombrages ou des effets de perspective. En effet ces méthodes travaillent dans le contexte où l'image 2D est la projection d'une scène tridimensionnelle, par exemple pour les applications robotiques. Mais cela n'est pas le cas dans bien des domaines d'application comme par exemple l'imagerie biomédicale ou l'étude de matériaux.

Pour ces applications on accède généralement à des coupes ou sections 2D des volumes. Nous nous limitons aux cas où les coupes sont parallèles (coupes sériées), contenant des objets bien visibles, mais qui sont assez éloignées les unes des autres: il est donc nécessaire de reconstruire le volume entre les coupes. Dans la pratique les coupes doivent être recalées les unes par rapport aux autres (réajustement de l'origine, des axes ...), puis les contours présents dans chaque coupes doivent êtres mis en corres-

pondance entre les coupes successives.

L'approche usuelle pour reconstruire le volume à partir de 2 contours est appelée triangulation de surface. Elle se fait de la facon suivante:

- extraction des sommets à partir d'une approximation polygonale pour chacun des contours
- première association de deux sommets (un sommet pour chaque contour), par exemple les 2 sommets les plus proches; cette association donne un coté du triangle
- un procédé itératif progresse à chaque itération vers un sommet voisin sur un des 2 contours ce qui définit une nouvelle facette triangulaire.



Il existe d'autres approches de la reconstruction 3D, comme par exemple la déformation des contours par utilisation de champs de forces, ou l'inférence de squelettes pondérés pour construire des coupes intermédiaires.

9.2 Squelette 3D

L'idée du squelette binaire se généralise à l'espace 3D. Cependant la notion d'objet mince est plus ambiguë: on peut chercher à ce que le squelette soit mince dans au moins une direction de l'espace (on parlera de *squelette surfacique*), ou dans deux directions de l'espace *(squelette filaire*).
Leur intérêt réside dans la description des objets ainsi représentés. Ils permettent égalemnet de calculer des paramêtres tels que la longueur interne et le nombre de connexité d'un objet 3D.

L'analyse dans l'espace 3D est cependant plus complexe, et les conditions plus difficiles à établir pour aboutir à un squelette satisfaisant.

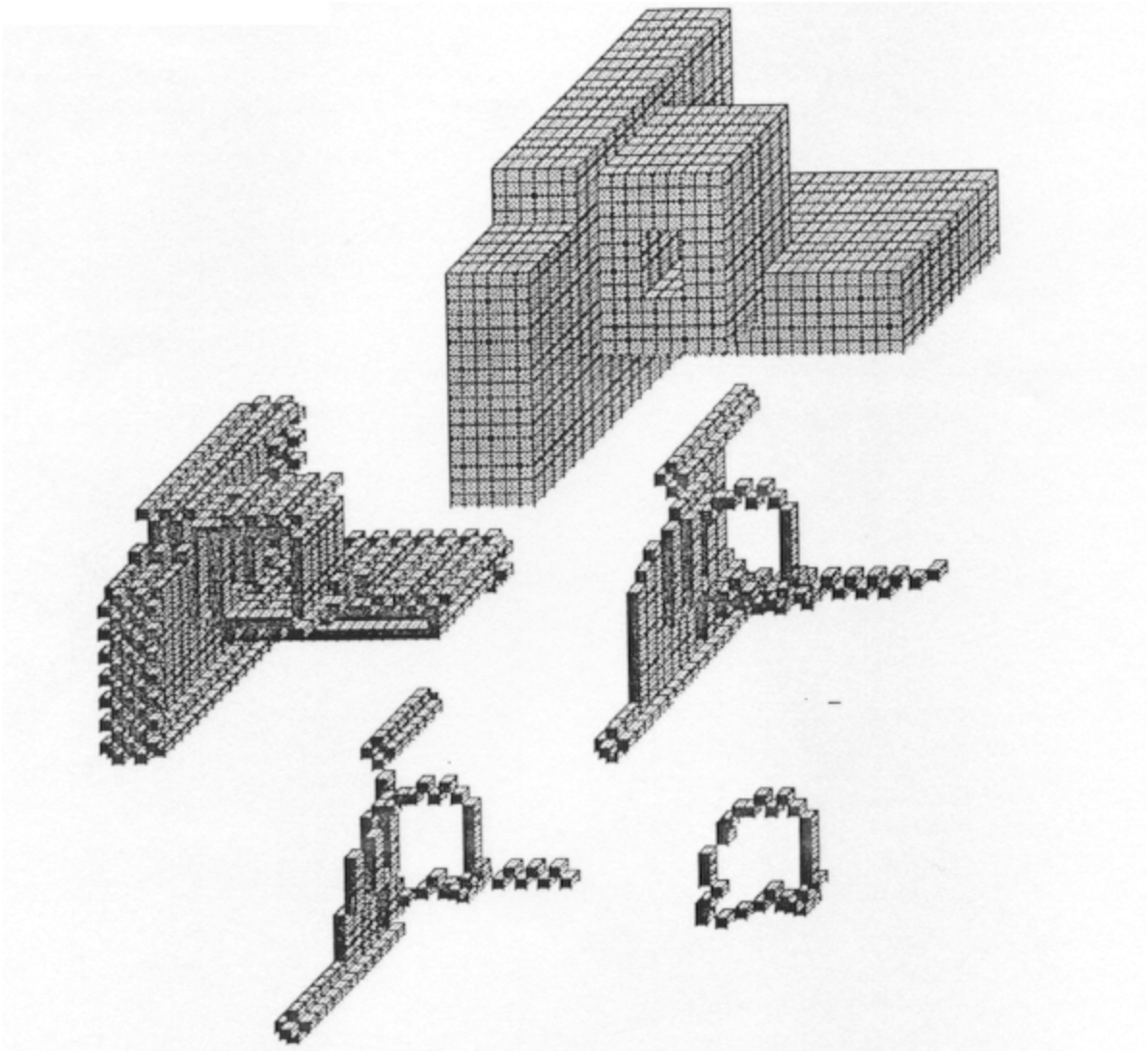


Fig 1: Objet 3D et ses squelettes surfaciques et filaires

9.3 Distances et axes médians 3D

Les distances du chanfrein se calculent également par le même schéma séquentiel qu'en 2D étendu au 3D. L'extension du chanfrein 3-4 est le chanfrein 3-4-5

Passage Aller

5	4	5
4	3	4
5	4	5

4	3	4
3	**X**	

Passage Retour

	X	3
4	3	4

5	4	5
4	3	4
5	4	5

L'extraction de l'axe médian et le calcul de lignes médianes se développe également en 3D. Nous présentons en figure 2 un axe médian et une ligne médiane calculés pour la distance d_{26}.

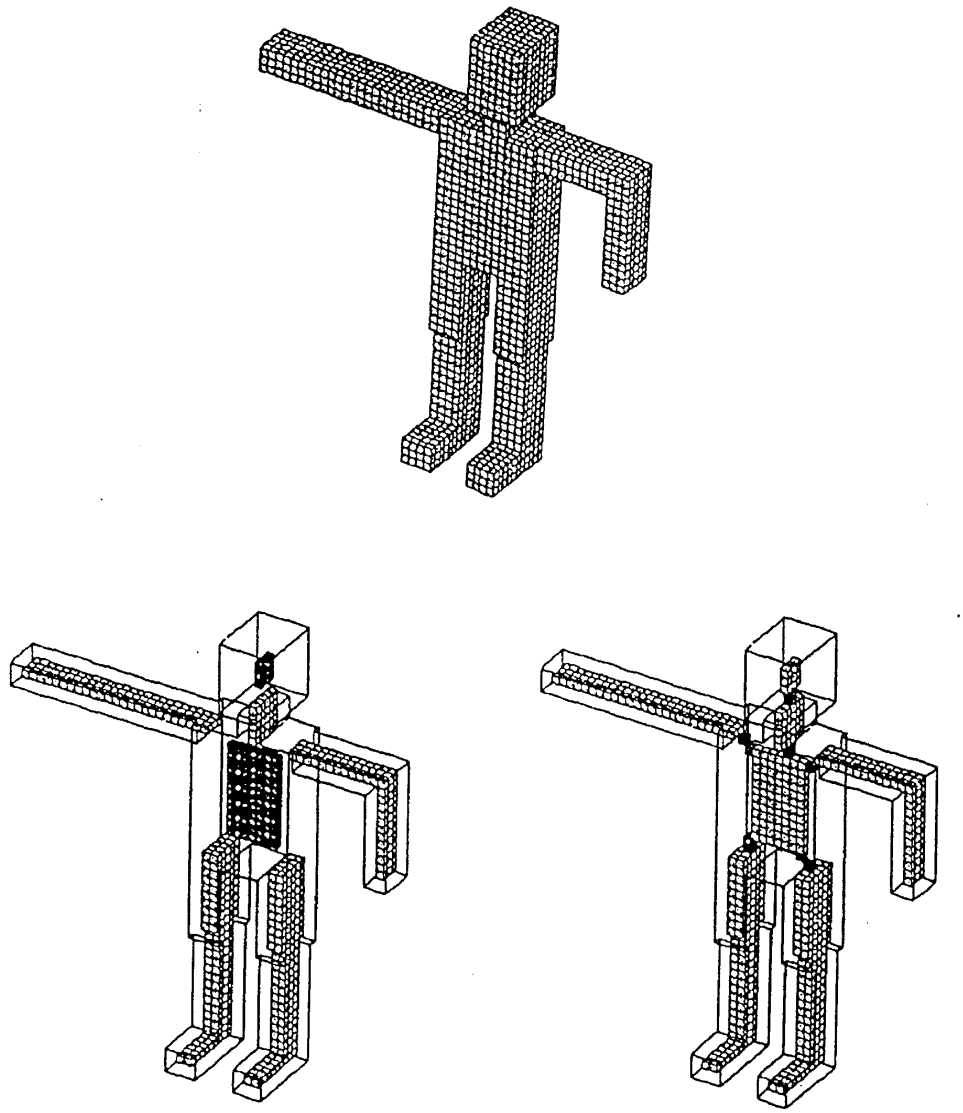


Figure 2: Axe médian et ligne médiane d'un objet 3D

10 Bibliographie

[ARC89] C. Arcelli, G. Sanniti. “A one-pass two operation process to detect the skeletal pixels on the 4 distance transform”. *IEEE Transaction Pattern Analysis. Machine Intelligence*, vol. 11, no 4, pp 411-414, 1989.

[ARC92] C. Arcelli, G. Sanniti. “Ridge points in Euclidean distance maps”. *Pattern Recognition Letters*, vol. 13, pp 237-243, 1992.

[ARC93] C. Arcelli, G. Sanniti. “Euclidean skeleton via centre-of-maximal disc extraction”. *Image and Vision Computing*, vol. 11, no 3 April 1993.

[BOL92] Ph. Bolon, J.L. Vila, T. Auzepy. “Operateur local de distance en maillage rectangulaire”. *Proc. 2ième colloque en géométrie discrète: Fondement et Applications*. pp 45-56, Grenoble, 17-18 septembre 1992.

[BOR86] Borgefors, G. “Distance transformations in digital images”. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, vol. 34, pp 344-371, 1986.

[CHA91] J.M. Chassery, A. Montanvert. “Géométrie discrète en analyse d’images”. Hermes, 1991.

[CHE95] Y. Chehadeh, D. Coquin, Ph. Bolon. “A generalization to cubic and non cubic local distance operators on parallelepipedic grids”.Proc. *5th DGCI*, Clermont-Ferrand, France, 25-27 september 1995.

[COQ93] D. Coquin, Ph. Bolon. “Comparaison d’opérateurs locaux de distance”. *Proc. 3ième Colloque de Géométrie Discrète: Fondements et Applications*, pp 182-191, 1993.

[COQ94] D. Coquin, Y. Chehadeh, Ph. Bolon. “3D local distance operator on parallelepipedic grids”, *Proc. 4th Discrete Geometry for Computer Imagery.* pp 147-156. Grenoble, 19-21 septembre 1994.

[COQ95] D. Coquin, Ph. Bolon. “Discrete distance operator on rectangular grids”, *Pattern Recognition Letters*, 16, pp 911-923, 1995.

[CHE96] Y. Chehadeh, D. Coquin, Ph. Bolon. “A skeletonization algorithm using chamfer distance transformation adapted to rectangular grids”, *IEEE, 13th ICPR, Pattern Recognition and Signal Analysis*, vol 2, pp 131 - 135, Vienne, Austria, september 96.

[CIUC97] M. Ciuc, D. Coquin, Ph. Bolon. “Quantitative assessment of two skeletization algorithme adapted to rectangular grids”,*IEEE, 9th International Conference, ICIAP’97*, vol 1, pp 588 - 595, Florence, Italy, september 97.

[LIA93] EH Liang, E. K. Wong. “An efficient method for obtaining morphological skeleton”. *Pattern Recognition Letters*, 14, pp 689-695, 1993.

[MAR87] M.P. Martinez-Peres, J. Jimenez, J.L. Navabon. “A thinning algorithm based on contours”. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, vol. 39, pp 186-201, 1987.

[NAG92] M.V. Nagendraprasad, P. SP Wang, A. Cupta. “An improved algorithm for obtaining thinning binary digital patterns”. *IEEE, 11th IAPR, The Hague The Netherlands*, vol. 3, pp 386-389. August 30-September 3, 1992

[NIB92] C. W Niblack, Ph. B. Gibbsons, D. W. Capson. “Generating skeletons and centre lines from the distance transform”. *Graphical Modeles and Image Processing*, vol. 54, no 5, september, pp 420-437, 1992.

[ROS66] Rosenfeld, A and J. Pflatz. “Sequential operations in digital picture processing”. *J. ACM*, 13, pp 471-494, 1966.

[SHI95] F. Y. Shin, C. C. Pu. “A skeletonization algorithm by maxima tracking on Euclidean distance transform”. *Pattern Recognition*, vol. 28, no 3, pp 331-341, 1995.

[THI94] E. Thiel. “Les distances de Chanfrein en analyse d’images: Fondements et Applications”. *Thèse*. Université Joseph FOURIER. Grenoble I. 21 septembre 1994.

[Ver91] B. Verwer. “Local distances for distance transformations in two and three dimensions”. Pattern Recognition Letters 12, pp 671-682, 1991.