Analyse spectrale aux ordres supérieurs

une introduction

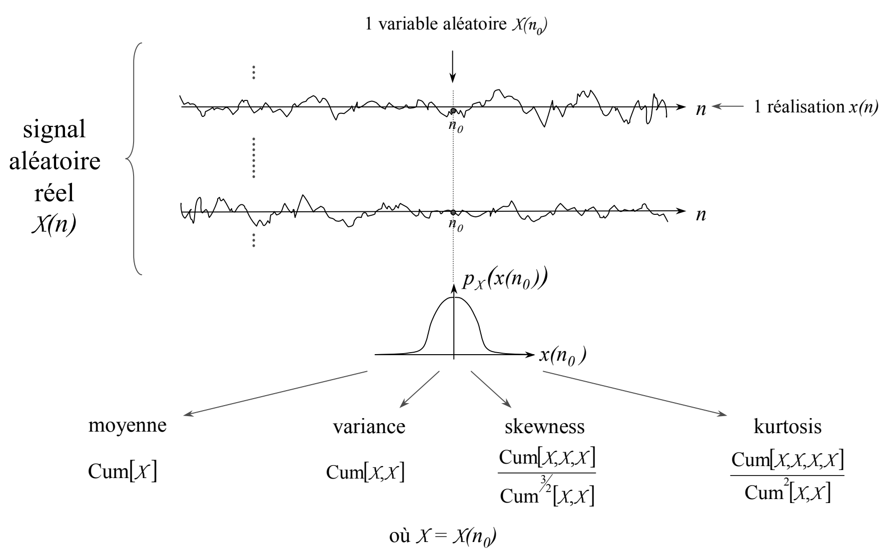
Le kurtosis spectral

Pierre Granjon
Valeriu Vrabie

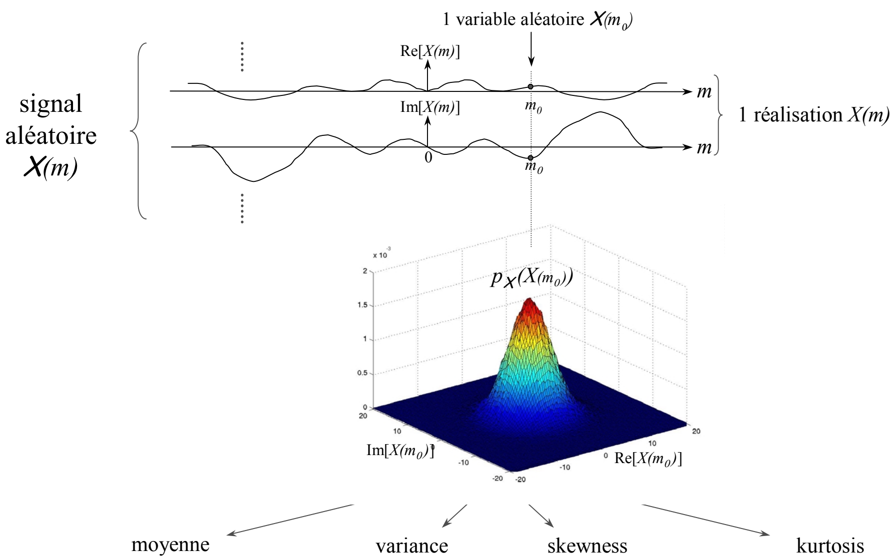
ETASM'03

---

1. INTRODUCTION — 1.1 Domaine temporel



1. INTRODUCTION — 1.2 Domaine fréquentiel



1. INTRODUCTION — 1.3 Signaux étudiés

$X(n)$: signal aléatoire réel, discret et stationnaire

⇩

Transformée de Fourier Discrète sur N points

$$X(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\; e^{-2\pi j \frac{n}{N} m}$$

= composante spectrale de $X(n)$ au canal de fréquence m

⇩

$X(m)$ = variable aléatoire complexe *circulaire*

⇩

Cumulants de $X(m)$ avec un nombre ≠ de termes conjugués et non-conjugués sont nuls

➡ Les seuls cumulants de $X(m)$ pouvant être ≠ **0** sont :
- la variance (ordre 2)
- le kurtosis (ordre 4)

PLAN

$$S_{X(2)}(m) = \mathrm{Cum}[X(m), X^*(m)]$$
$$= \text{variance de } X(m)$$
$$= E[|X(m)|^2] - E^2[X(m)]$$

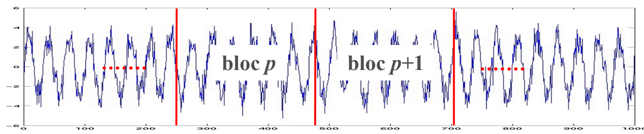
$X(n)$ stationnaire ➡ $X(m)$ circulaire ➡ $E[X(m)] = 0$

➡ $S_{X(2)}(m) = E[|X(m)|^2]$

= densité spectrale de puissance (DSP) classiquement utilisée en analyse spectrale

2. ÉTUDE À L'ORDRE 2 : densité spectrale de puissance — 2.2 Estimation

1 seule réalisation $x(n)$ du signal aléatoire $X(n)$



$\Rightarrow$ M blocs

TFD $\to$ $|X_p(m)|^2$ TFD $\to$ $|X_{p+1}(m)|^2$ ……… M périodogrammes

$$\hat{S}_{X(2)}(m) = \frac{1}{M}\sum_{p=1}^{M}\left|X_p(m)\right|^2 = \text{ estimateur du périodogramme moyenné}$$

propriétés

- Estimateur approximativement non biaisé
- Variance en $\dfrac{S_{X(2)}(m)}{M}$

2. ÉTUDE À L'ORDRE 2 : densité spectrale de puissance — 2.3 Interprétation

$S_{X(2)}(m)$ = densité spectrale de puissance du signal $X(n)$

= puissance du signal contenue uniquement dans le canal de fréquence m

Exemple

Quelles est la nature des composantes de ce signal ?

$\Rightarrow$ peu d'informations sur la nature des composantes spectrales $\Rightarrow$ Ordre 4 ?

PLAN

3. ÉTUDE À L'ORDRE 4 : kurtosis spectral 3.1 Définition

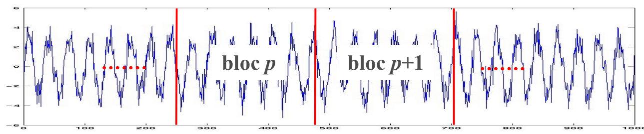
$$K_X(m) = \frac{\mathrm{Cum}[X(m), X^*(m), X(m), X^*(m)]}{\mathrm{Cum}^2[X(m), X^*(m)]}$$

$X(n)$ stationnaire ⇒ $X(m)$ circulaire ⇒ simplifications

$$K_X(m) = \frac{\mathrm{E}[\,|X(m)|^4\,]}{\mathrm{E}^2[\,|X(m)|^2\,]} - 2$$

3. ÉTUDE À L'ORDRE 4 : kurtosis spectral — 3.2 Estimation

1 seule réalisation *x(n)* du signal aléatoire *X(n)*



⇨ *M* blocs

TFD → $X_p(m)$ TFD → $X_{p+1}(m)$ ………

$$\hat{K}_x(m) = \frac{M}{M-1}\left[\frac{(M+1)\sum_{p=1}^{M}\left|X_p(m)\right|^4}{\left(\sum_{p=1}^{M}\left|X_p(m)\right|^2\right)^2} - 2\right]$$

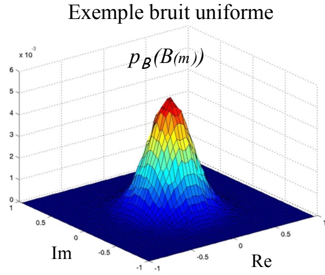
propriétés
- •Estimateur approximativement non biaisé
- •Variance $\xrightarrow[M>20]{} \frac{4}{M}$

3. ÉTUDE À L'ORDRE 4 : kurtosis spectral — 3.3 Interprétation

$\mathcal{B}(n)$ = signal aléatoire stationnaire, multicorrélations absolument sommables
= processus mélangeant

Alors $B(m)$ = TFD [$\mathcal{B}(n)$] = variable aléatoire complexe,
circulaire,
gaussienne.

Exemple bruit uniforme



$\mathcal{B}(n)$ = processus mélangeant ➡ $K_{\mathcal{B}}(m) = 0$

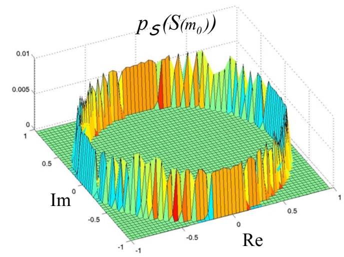
3. ÉTUDE À L'ORDRE 4 : kurtosis spectral — 3.3 Interprétation

$\mathcal{S}(n) = Ae^{j\left(2\pi\frac{m_0}{N}n+\varphi\right)}$ où φ est uniformément répartie sur $[0\,,2\pi[$

= signal aléatoire sinusoïdal stationnaire

Alors $\mathcal{S}(m_0)$ = TFD [$\mathcal{S}(n)$] = $Ae^{j\varphi}$ $\rightarrow$ v.a. complexe, circulaire

Exemple sinus stationnaire

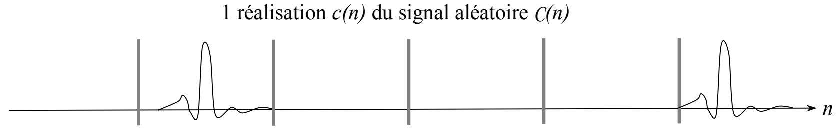


$\mathcal{S}(n)$ = sinus de fréquence m_0 stationnaire ➡ $K_{\mathcal{S}}(m_0) = -1$

3. ÉTUDE À L'ORDRE 4 : kurtosis spectral — 3.3 Interprétation

$\mathcal{C}(n)$ = signal transitoire

1 réalisation $c(n)$ du signal aléatoire $\mathcal{C}(n)$



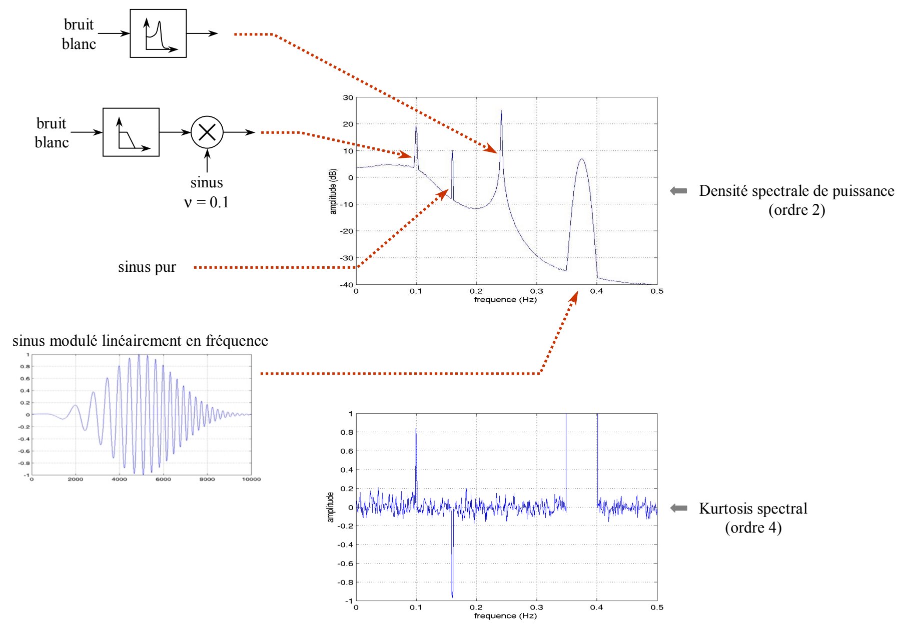
$\mathcal{C}(m)$ = TFD [$\mathcal{C}(n)$] : $\mathcal{T}(m)e^{j\varphi_1}$ 0 0 0 $\mathcal{T}(m)e^{j\varphi_2}$

$\mathcal{C}(m)$ non circulaire ➡ pas d'étude théorique, mais comportement estimateur

si transitoire présent dans L blocs ➡ $\hat{K}_{\mathcal{C}}(m) = \frac{M}{M-1}\left[\frac{(M+1)}{L} - 2\right]$

$\mathcal{C}(n)$ = signal transitoire et $L << M$ ➡ $\hat{K}_{\mathcal{C}}(m) > 0$

3. ÉTUDE À L'ORDRE 4 : kurtosis spectral — 3.3 Interprétation



4. ANNEXES — 4.1 Signal réel 1

Densité spectrale de puissance ➡ Amplitude (dB)

fréquence (Hz)

Kurtosis spectral ➡ Amplitude (dB)

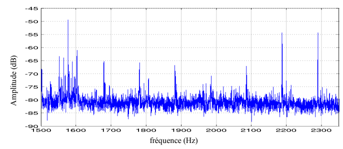
fréquence (Hz)

Spectrogramme ➡ temps (s)

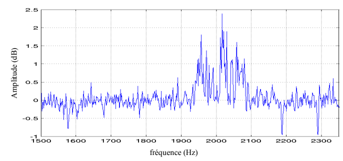
fréquence (Hz)

4. ANNEXES — 4.2 Signal réel 2

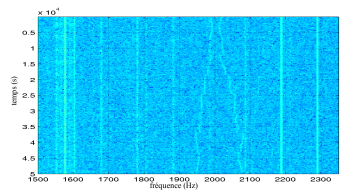
Densité spectrale de puissance ➡



Kurtosis spectral ➡



Spectrogramme ➡

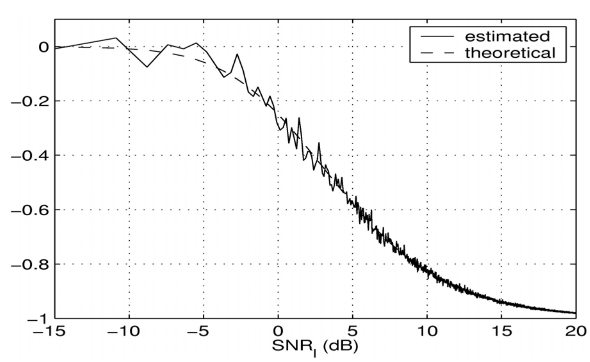


4. ANNEXES — 4.3 Biais d'estimation

$$\widehat{K}_x(m) = \frac{M}{M-1}\left[\frac{(M+1)\sum_{p=1}^{M}|X_p(m)|^4}{\left(\sum_{p=1}^{M}|X_p(m)|^2\right)^2} - 2\right]$$

x(n) = b(n) + s(n)

$$K_x(m_0) = -\left(\frac{RSB(m_0)}{1+RSB(m_0)}\right)^2$$



$$var\{\widehat{K}_x(m)\} = \frac{4M^2}{(M-1)(M+2)(M+3)} < \frac{4}{M}$$